1. 受力 → ~~運動~~

→ 運動狀態改變

m↑ a↓

4-2 牛頓第二運動定律 —— 狀態的改變與力

一、加速度與力的關係

若無外力作用，則物體將維持原來的運動狀態，很自然地也可以反過來說：若物體的運動狀態改變，則此物體必定受到外力作用，而運動狀態或速度改變就代表有加速度存在。因此，牛頓隨即提出了 3. **第二運動定律**（Newton's second law of motion），指出：

① a 合力

> 一物體的加速度與作用在此物體上的外力成正比，且加速度方向與外力方向相同。

F

此處所言的外力為物體所受的合力或淨力，而非個別的部分力，且加速度方向必定與合力方向相同。也就是此兩物理量的關係為一向量關係式，若以 $\vec{a}$ 代表物體的加速度、$\vec{F}$ 代表物體所受外力，則第二運動定律可表示為

②

$$\vec{a} \propto \vec{F} \quad 或 \quad \frac{F}{a} = 定值\ m \tag{4.1}$$

4. 慣性質量

F 與 a 之比值可代表物體的某種特性。對物體施以固定的外力 F，若所產生的加速度 a 愈小（或 $\frac{F}{a}$ 之比值愈大），就代表了此物體愈不容易改變其運動狀態，牛頓稱此比值為「不活動性」（inactivity）或「惰性量」（inertness），在物理上則稱它為**慣性質量**，以下我們將簡稱為質量（mass），並常以 m 表示。故第二運動定律也可寫成

③ 1N 1kg 1m/s²　　＊ a // F

＊ 單位

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{4.2}$$

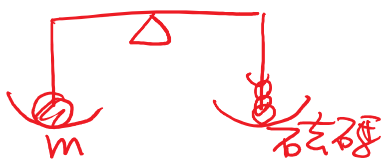
(達因) 1dyne 1g 1cm/s²　　1N = 10⁵ dyne

若物體在 x-y 平面上運動，則運動定律的向量式可表示為兩個分量的關係式：

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \end{aligned} \tag{4.3}$$

④

在此還要強調的是第二運動定律的（4.2）或（4.3）式，也只在慣性定律成立下所選定之慣性參考坐標系中，才能成立。



F=ma

補充資料 $F = ma$ 來源及牛頓第一與第二運動定律關係

科學史

牛頓在他巨著中第二運動定律的真正敘述為：

「運動量的變化與所受的外力成正比；且運動量變化的方向與所受外力的方向相同。」

此處的運動量，牛頓定義為速度與物體質量的乘積，即 $\vec{p}=m\vec{v}$。所以，牛頓第二運動定律的原義應

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}，\vec{F}=\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$$

而非式（4.2）。僅當物體的質量維持不變時，才有 $\vec{F}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\vec{a}$，但牛頓從未寫過此關係式。今天大家所常使用的第二運動定律式（4.2），是沿襲 1736 年物理學家白努利（Johann Bernoulli，1667 ～ 1748，瑞士人）所用的表示法。

若物體不受外力，即 $\vec{F}=0$，則由 $\vec{F}=m\vec{a}$ 可知：物體加速度 $\vec{a}=0$，或物體運動速度為定值，即物體將維持靜止或維持等速運動；如此即可得到慣性定律內容。因此常有人覺得慣性定律只是第二運動定律之特例，而顯得多餘。然而第二運動定律並非輕而易舉便可進入物理學家的思考範疇中，若非笛卡兒提出「運動狀態」的觀念，將大家對運動的描述由習以為常的「位置」改變轉移至「運動狀態」的改變，便不會集中注意於「速度的變化」或「加速度」在探討運動物體上所扮演的關鍵角色，後人也就不易發現第二運動定律。且第二運動定律也只在慣性坐標系下，方能成立.因此我們不可視慣性定律為第二運動定律之特例，而忽略慣性定律的重要性。

5、2nd law 的應用

二、質量與力的單位

牛頓本人並沒有給出質量與力的嚴格單位，他一直是以兩物體受力比值的論述方式，而免除了力單位的需要。自 18 世紀末，國際上開始使用共同的質量定義後，便可定義力的標準單位。若使質量 1 千克（1 kg）的物體，以一固定拉力使此物體（在光滑水平面上）產生 1 m / s² 的加速度時，則此物體所受之外力

(1) 定義力的單位

$$F = 1\ \text{kg} \times 1\ \text{m} / \text{s}^2 = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$$

稱為 **1 牛頓**（newton，記為 N）。如此，使 A 千克的物體，產生 B 公尺 / 秒² 加速度之外力，即為 $A \times B$ 牛頓。

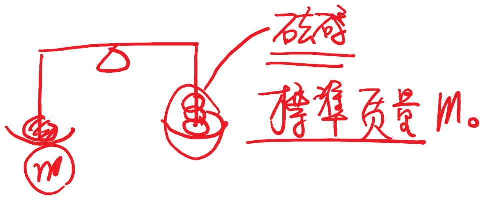
第二運動定律告知我們，若能找到作用在一物體上的外力，就可知道此物體的速度改變狀況或運動情形。所以，如何得知作用在物體上的外力便顯得格外重要；而如何發現或以正確的數學形式來表示作用在物體上的力，更是物理發展上的一大挑戰。為了方便起見，我們將以一個固定的拉力、推力開始，再透過重力、正向力、張力與摩擦力，來逐步介紹第二運動定律廣泛的應用內涵與運算方法。

(2) 失重處 可用 2nd law 測 m ← 慣性質量

三、推力與拉力

有重力處，用天平 測 m ← 重力質量

推動重物（圖 4-9），與馬匹拉車是生活中較常見和較早接觸到對力的一些經驗，我們就先以此種推力或拉力，體會如何利用第二運動定律來處理與推力、拉力相關的運動問題。



$F_1 = m\,a$

$F_1 \rightarrow m \quad a$

$F_1 \rightarrow m_0 \quad a_0$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m_0} = \dfrac{a_0}{a} \Rightarrow m =$

▲ 圖 4-9　必須施加推力才可使木箱移動。

HW p41 ①–③

P4-2 ①-⑤

$36\ \mathrm{km/h} = 10\ \mathrm{m/s}$

$V^2 = V_0^2 + 2aS$

$40^2 = 0 + 2 \times a \times 2.5$

範例 4-1

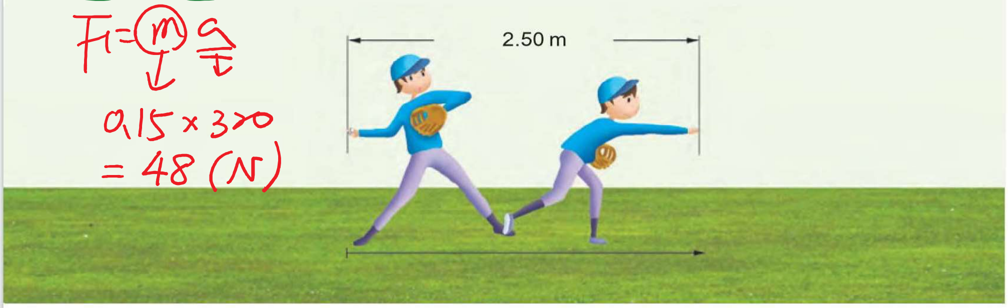
$a = 320\ \mathrm{m/s^2}$

$V_0 = 0 \quad S = 2.5\ \mathrm{m} \quad V = 40\ \mathrm{m/s}$

建民將質量為 0.150 kg 的棒球假設從手中自靜止以等加速度加速至 144 km / h 的速度投出，若他對球施力的距離為 2.50 m，如下圖所示，求他施以多少的平均力於棒球上？【相關練習：習題 2.、3.、13.】

$F = ma$

$0.15 \times 320 = 48\ (\mathrm{N})$



概念 外力與加速度成正比。

策略 1. 不含時間之等加速度公式：$v^2 = v_0^2 + 2aS$ 或 $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2S}$。

2. 牛頓第二運動定律：$F = ma$。

解 末速 $v = 144\ \mathrm{km/h} = 144 \times 1000\ \mathrm{m} / 3600\ \mathrm{s} = 40.0\ \mathrm{m/s}$

加速度 $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2S} = \dfrac{40.0^2 - 0^2}{2 \times 2.50} = 320\ (\mathrm{m/s^2})$

故所施力 $F = ma = 0.150 \times 320 = 48.0\ (\mathrm{N})$

應用 若施以一半的力，則球速將為原來速度的幾倍？

$\left[v' = \sqrt{2a'S} = \sqrt{2 \times \dfrac{F'}{m} \times S} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} v \right]$

$X = F_x = ma$

$12 \times \frac{3}{5} = 4 \times a \Rightarrow a = 1.8$

範例 4-2

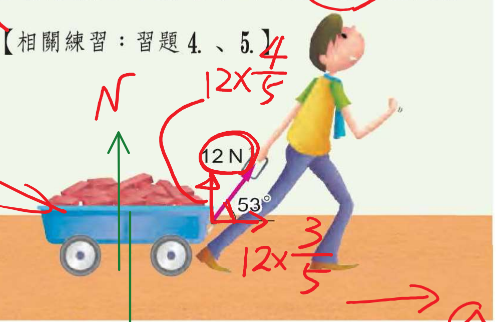
小強施以與水平面呈 53° 角、12 N 的拉力於質量為 4.0 kg 的小推車上，如下圖所示。若推車最初為靜止，且推車與路面的摩擦力可忽略不計，則 2.0 s 後此推車的速度為若干？ 【相關練習：習題 4.、5.】

$V_0 = 0$　　a

$V = V_0 + at$

0　　1.8　　2

$\Rightarrow V = 3.6\ (m/s)$



F_x　　N　　$12 \times \frac{4}{5}$　　$12 \times \frac{3}{5}$　　$\rightarrow a$

$4 \times 9.8\ (N)$

概念　水平方向的加速度與水平分力成正比。

策略　1. 水平分力 $F_x = F\cos\theta$。

2. 由第二運動定律，在水平方向上有 $F_x = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m}$。

3. 速度、加速度與時間之關係：$v_x = a_x t$。

~~B-4m=4mg~~

解　$F_x = 12\cos 53° = 12 \times \frac{3}{5} = 7.2$（N）

$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{7.2}{4.0} = 1.8$（m / s²）

故 2.0 s 後的速度 $v_x = a_x t = 1.8 \times 2.0 = 3.6$（m / s）

1kg → 重力 → 1kgw

1kgw=9.8N ?

$\downarrow a = g = 9.8$　　⇓

$F = ma = 1 \times 9.8 = 9.8\ (N)$ ⇒ 1kgw=9.8N

W=mg

四、重力與正向力

在第 3 章討論靜力平衡時，物體的重量均是以「公斤重」（kgw）為單位。另一方面，由實驗顯示，任一物體在地面附近均會以 $g = 9.8\ m/s^2$ 之加速度下落，因此由第二運動定律知，必有一外力作用在此物體上，且此外力量值為

$$\boxed{W = mg} \quad (4.4)$$

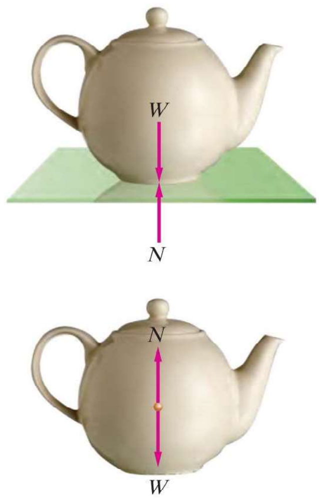
此力稱為重力或重量（weight），其中 m 為物體之質量。由式（4.4），質量 1 kg 的物體所受之重力為 1 kgw，也就等於 9.8 N。

一靜置於水平桌面上的物體，受到鉛直向下的重力影響，但物體並未運動，仍處於靜止而無加速度，故由第二運動定律，在鉛直方向的合力 F_y 須為 0，即

$$F_y = ma_y = 0 \tag{4.5}$$

因此，必有另一力作用在靜置於桌面上的物體，它的量值與重力相同、方向與重力相反，即為垂直向上的一支撐力（圖 4-10）。因數學上的**正向**（normal）有法線方向或平面的垂直方向的意義，故此支撐力稱為**正向力**（normal force）。若以 N 代表水平桌面作用在物體的正向力，則

$$N = W \tag{4.6}$$



▲ 圖 4-10　靜置於桌面上的物體，受到重力 W 與正向力 N 的作用。

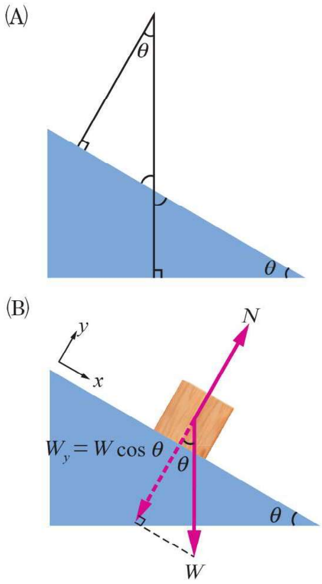
但若物體置於傾斜角為 θ 的斜面上時，不論物體是靜止或沿斜面運動，物體在斜面的垂直方向上（若取為 y 軸）不會有加速度產生，由第二運動定律可知，此時在 y 方向的合力為 0（圖 4-11），即

$$F_y = N - W\cos\theta = 0$$

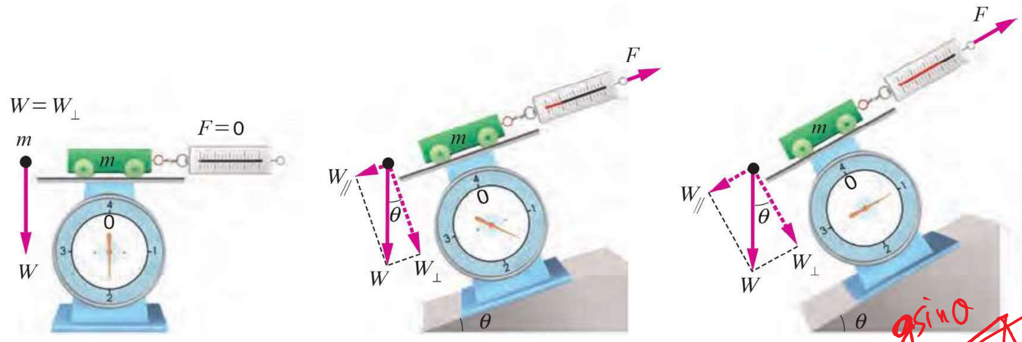
故斜面對物體的正向力為

$$N = W\cos\theta = mg\cos\theta \tag{4.7}$$

亦即物體所受的正向力並不一定等於物體的重量 W（下頁圖 4-12）。



▲ 圖 4-11　(A)鉛垂向下之直線與斜面之法線夾角 θ 即為斜面之傾斜角 θ。(B)物體在斜面上的正向力與斜面的傾斜角有關。



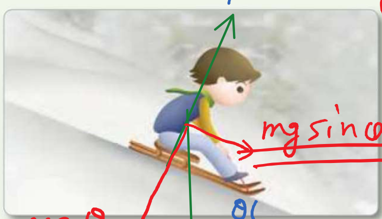
▲ 圖 4-12　物體在不同傾斜面所受的正向力並不一定等於物體的重量。傾斜角愈大，所受正向力（$W_{\perp}$）愈小，在彈簧臺秤上的讀數也愈小。

$g\sin\theta$　$g\cos\theta$　g

範例 4-3　光滑斜面上的加速度 $a=g\sin\theta$

如右圖，質量為 m 的小孩坐在雪橇上，此雪橇從有雪覆蓋並與水平面呈 θ 角的光滑斜坡上滑下，求小孩的加速度。

【相關練習：習題 6.、15.、16.】



概念　1. 沿著斜坡的加速度與沿著斜坡的外力成正比。

2. 物體沿著斜坡運動全來自於重力的影響。

$F = ma$
$mg\sin\theta = ma$
$a = g\sin\theta$

策略　1. 取沿著斜坡面的方向為 x 軸。

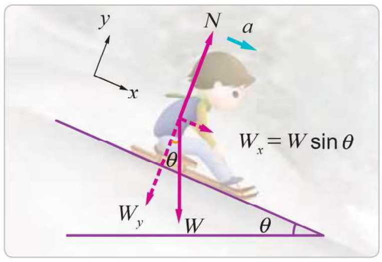
2. 第二運動定律在斜面的表示式：$F_x=ma_x$。

3. 沿著 x 方向的總外力 $F_x=W_x=W\sin\theta=mg\sin\theta$。

解　$F_x=W\sin\theta=mg\sin\theta$

故小孩沿著斜坡的加速度

$$a_x=\frac{F_x}{m}=\frac{mg\sin\theta}{m}=g\sin\theta$$



應用　1. 當斜坡的傾角為 90°時，小孩的加速度將為何值？〔$a_x=g\sin 90°=g$〕

2. 假設小孩與雪橇之質量共為 M，斜面作用在雪橇的正向力為何？〔$N=Mg\cos\theta$〕

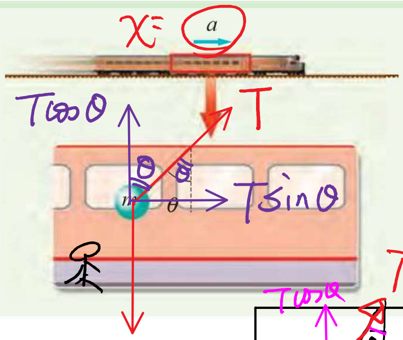
外面 → a
⇓
(慣性參考系)

x: $F=ma$
$T\sin\theta=ma$ ①
y: $T\cos\theta=mg$ ②
$\frac{①}{②}$ $\tan\theta=\frac{a}{g}$ #

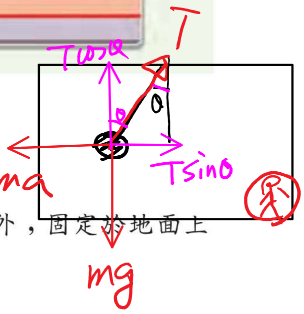
→ $a=g\tan\theta$
$①^2+②^2$
$T^2=m^2(a^2+g^2)$
$T=m\sqrt{a^2+g^2}$ #

範例 4-4

質量為 m 之圓球以細繩繫住，懸掛在火車車廂內的天花板下，如右圖所示。若火車以加速度 a 向前行駛，圓球會擺向後方，造成細繩與垂直線之夾角為 θ，求 $\tan\theta$ 為何？



*車內: $a=0$ x: $T\sin\theta=ma$
(非慣性) $F=0$ y: $T\cos\theta=mg$



概念 1. 慣性參考坐標系的選擇。

2. 牛頓第二運動定律：$F=ma$。

策略 1. 圓球雖靜止於車廂內，但若取慣性參考坐標系在火車外，固定於地面上的觀察者，則圓球的加速度為 a，且沿著 $+x$ 方向。

2. 圓球所受外力有重力 $W=mg$ 及細繩的斜向上拉力。

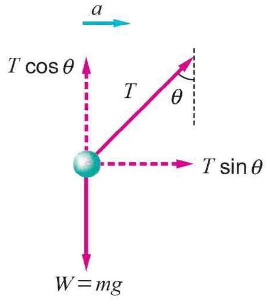
3. $F_x=T\sin\theta$，$F_y=T\cos\theta-W$。

4. 代入牛頓第二運動定律，並將向量式 $\vec{F}=m\vec{a}$ 分開寫成兩個分量式：$F_x=ma_x$，$F_y=ma_y$。

解

$$\begin{cases} T\sin\theta=F_x=ma_x=ma \\ T\cos\theta-W=F_y=ma_y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T\sin\theta=ma \\ T\cos\theta=mg \end{cases} \Rightarrow \tan\theta=\frac{a}{g}$$



應用 在車廂內的人，如何利用單擺測得火車的加速度？

〔若單擺的傾斜角為 θ，利用 $a=g\tan\theta$ 即可測得火車之加速度〕

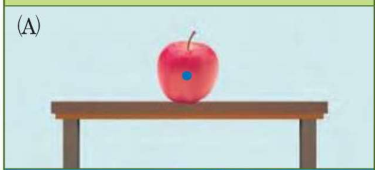
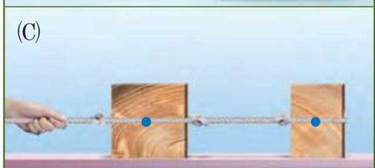
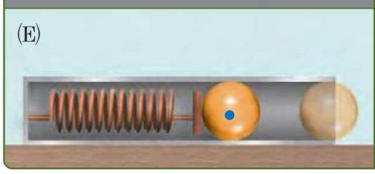
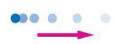
五、物體與環境——質點與力

第二運動定律主要是描述物體在受力後，運動變化的快慢與方向；然各種物體樣式繁多、形狀各異，若運動定律所要關注的物體性質是其質量，而非物體的外形或大小，為要突顯「物體具有質量」的要素，可把物體簡化為具有質

量的點，稱為**質點**。因此，對實際物體運動的描述，便可轉化成對質點運動的描述。

而質點所受的力，則與它周圍的環境或施力物有密切關係。或者也可說，環境與質點間的關係，完全可用彼此之間的交互作用力，來表示環境的影響。例如：手推書本、人拉貨物、蘋果落地、雪橇下滑、手拉以繩相繫的兩木塊、汽車煞車或鐵塊壓縮彈簧，這些質點皆因處在不同環境下，而會有不同的作用力發生。處理這些質點的運動情形，便需要先指出相關的環境因素或施力物，才能知道對應之作用力。如表 4-1 中的物體被視為質點後，可簡化分析，並強化出重要的運動特徵。

表 4-1　物體受環境的影響轉換成質點受力的作用：(A)桌上蘋果。(B)手推紙箱。(C)手拉以繩連接之木塊。(D)汽車煞車。(E)球壓縮彈簧。（為簡化起見，除(A)圖之外，其餘圖所受的正向力與重力未標示出來）

運動情形	質　點	環境或施力物	作用力	受力情形
(A) 	蘋　果	桌面、地球	正向力、重力	
(B) 	紙　箱	手	推　力	
(C) 	木　塊	繩子、手	張力、拉力	
(D) 	汽　車	路　面	摩擦力	
(E) 	球	彈　簧	彈　力	

在使用第二運動定律時，我們便可簡單地以下面四個步驟，來協助我們分析問題：

1. 選定質點：將所討論或欲求解的運動物體，化為質點。
2. 尋找力量：將所有圍繞此質點的周遭環境，轉化為作用於此物體的力，並繪出作用力圖（free-body diagram）。

分解力 $\begin{cases} \text{運動方向} \\ \text{與〃〃垂直} \end{cases}$

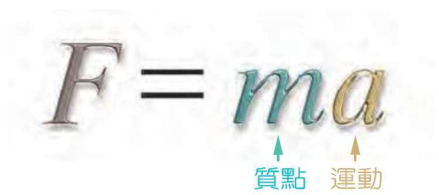
3. 列出加速度：指出此質點的加速度方向，並畫在作用力圖旁。
4. 引用運動定律：將已知數據清楚地代入 $\vec{F}=m\vec{a}$ 或 $F_x=ma_x$，$F_y=ma_y$，求解出未知量。

補充資料　古典物理學的特質 —— 機械論

科學哲學

笛卡兒與伽利略皆認為：一切自然現象要從不可懷疑的基礎出發，而最不可懷疑的事物就是占有空間、具有外形的物體，或是非常小物體的質點；另一個不可懷疑的便是物體均有位置的變化——即運動（包括靜止）。這種以質點和運動為基礎來探討自然現象的方法，稱為機械論（mechanism）。

第二運動定律



等式右邊之 m 為質點的質量，a 為運動中的加速度，就代表了機械論的兩個主要觀點。牛頓第二運動定律也就是以此概念為基礎，更使得機械論成為古典物理學中最重要的論證方法。

125
126

4-3 牛頓第三運動定律 —— 作用與反作用

一、作用—反作用力

牛頓藉分析兩物體碰撞或接觸時的受力情形，寫下了在他巨著中第一冊裡的最後一個定律——第三運動定律（Newton's third law of motion）：

對每一個作用力而言，永遠存在一個量值相等的反作用力。或者說：兩物體作用在對方的相互作用力，永遠相等且指向相反方向。

比較口語的敘述可寫成：

「若 A 物體施一力於 B 物體上〔稱為作用（action）〕，則 B 物體同時施另一力於 A 物體上〔稱為反應或反作用（reaction）〕。此兩力有相同的量值、但相反的方向，且此兩力同時分別作用在不同的物體上。」

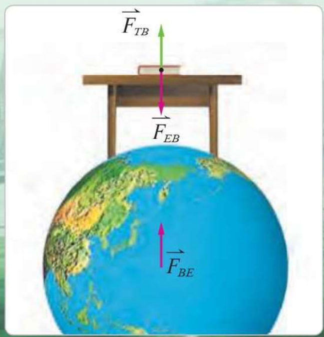
若以數學式描述的話，則第三定律可寫成

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (4.8)$$

$\vec{F}_{AB}$ 與 $\vec{F}_{BA}$ 分別代表 A 作用於 B，與 B 作用於 A 的力（圖 4-13）。例如：一本書靜止置於水平桌面上，則對應於書本重量（$\vec{F}_{EB}$）的反作用力，為書本吸引地球的力（$\vec{F}_{BE}$），且作用在地心上（圖 4-14）；桌子對書本之正向力（$\vec{F}_{TB}$），並非是書本重量的反作用力，因為此兩力（重量與正向力）作用在同一物體上。

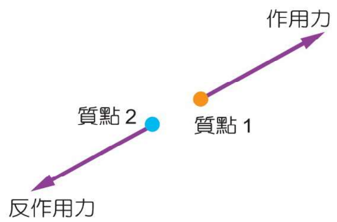
▼ 圖 4-13　腳用力踢球，球會以相同量值的力作用在腳上。

▼ 圖 4-14　作用—反作用力（重量 $\vec{F}_{EB}$ 與書本對地球的吸引力 $\vec{F}_{BE}$）並不作用在同一物體上。



此種作用力與反作用力可再加以強調如下（圖 4-15）：

1. 它們是成對地發生。
2. 兩力的量值永遠相同。
3. 兩力的方向永遠相反。
4. 兩力作用在不同質點上。
5. 兩力同時發生、同時作用且同時消失。



▲ 圖 4-15　作用－反作用力之作用點作用方向與作用量值。

(1) m_1+m_2　$F_1=ma$　$6=3a$　$a=2\ (m/s^2)$

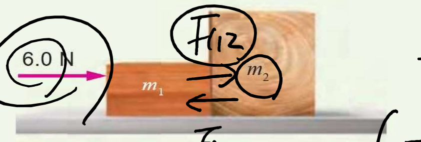
(2) m_2 = $F_1=ma$　$F_{12}=2\times2$　$=4\ (N)$

範例 4-5

兩木塊受 6.0 N 之推力，沿著光滑水平面移動，如下圖。若 $m_1=1.0\ \text{kg}$、$m_2=2.0\ \text{kg}$，求：

(1) 兩木塊之加速度。

(2) 兩木塊之間的接觸力。



m_1　$F_1=ma$　$6-F_{21}=1\times2$　$F_{21}=4$

【相關練習：習題 18.、19.】

HW p4-4 ⑥-⑩

概念　1. 視兩木塊為一質點。

2. 質點之加速度與所受外力成正比（第二運動定律）。

3. 因 m_2 只與 m_1 接觸，故作用於 m_2 之唯一水平外力為來自於 m_1 之接觸力。

策略　1. 兩木塊之加速度：$a=\dfrac{F_{外}}{m}=\dfrac{F_{外}}{m_1+m_2}$，此處 $F_{外}$ 代表外力。

2. m_2 之加速度＝m_1 與 m_2 合起來之加速度。

3. 接觸力 $F_{12}=m_2a$。

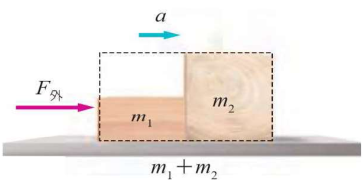
解　〈方法一〉

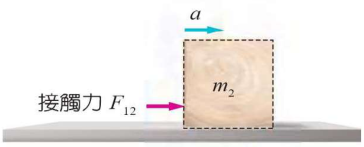
(1) 選定 m_1 與 m_2 全部：

$$a=\frac{F_{外}}{m_1+m_2}=\frac{6.0}{1.0+2.0}=2.0\ (\text{m/s}^2)$$

(2) 選定 m_2：

接觸力 $F_{12}=m_2a=2.0\times2.0=4.0\ (\text{N})$



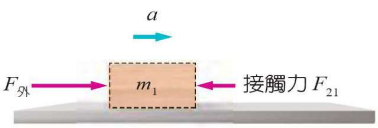


〈方法一〉

〈方法二〉

選定 m_1：$F_{外}-F_{21}=m_1a$……①

選定 m_2：$F_{21}=m_2a$ …………②



〈方法二〉

①、②兩式相加，得 $F_{外}=(m_1+m_2)a$

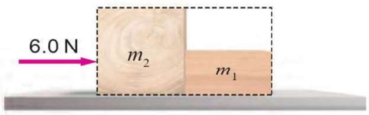
(1) $a=\dfrac{F_{外}}{m_1+m_2}=2.0\ (\mathrm{m/s^2})$

(2) 接觸力 $F_{21}=m_2a=2.0\times2.0=4.0\ (\mathrm{N})$

應用

1. 作用於 m_1 之合力為何？

〔$\vec{F_1}=\vec{F}_{外}+\vec{F}_{21}=6.0-4.0=2.0$（N），向右，或 $F_1=m_1a=1.0\times2.0=2.0$（N）〕



2. 若將 m_1 與 m_2 位置對調，施以相同外力，則兩木塊之接觸力有無改變？變大或變小？〔有改變，量值為 2 N，變小〕

3. 為何以木箱推雞蛋，蛋不易破，而以雞蛋推木箱，蛋較易破？〔以木箱推雞蛋，則 $F_{接觸}=m_{蛋}a$；以蛋推木箱時，$F_{接觸}=m_{木箱}a$，故蛋會受較大之力，而較易破〕

*輕繩：各處張力同

*重繩：①

二、張　力

在工程技術上常須使用繩索、鋼纜來達到傳遞力的目的，若我們將一條理想的繩子視為質量可以忽略，且不可伸縮者，則接觸力如何利用繩子將力傳遞出去？簡單來說，力是藉著繩子內一個點接著一個點為基礎來傳遞的，我們稱

在繩子內任何一段，作用於其鄰接一段的拉力，為此繩的張力（tension）。

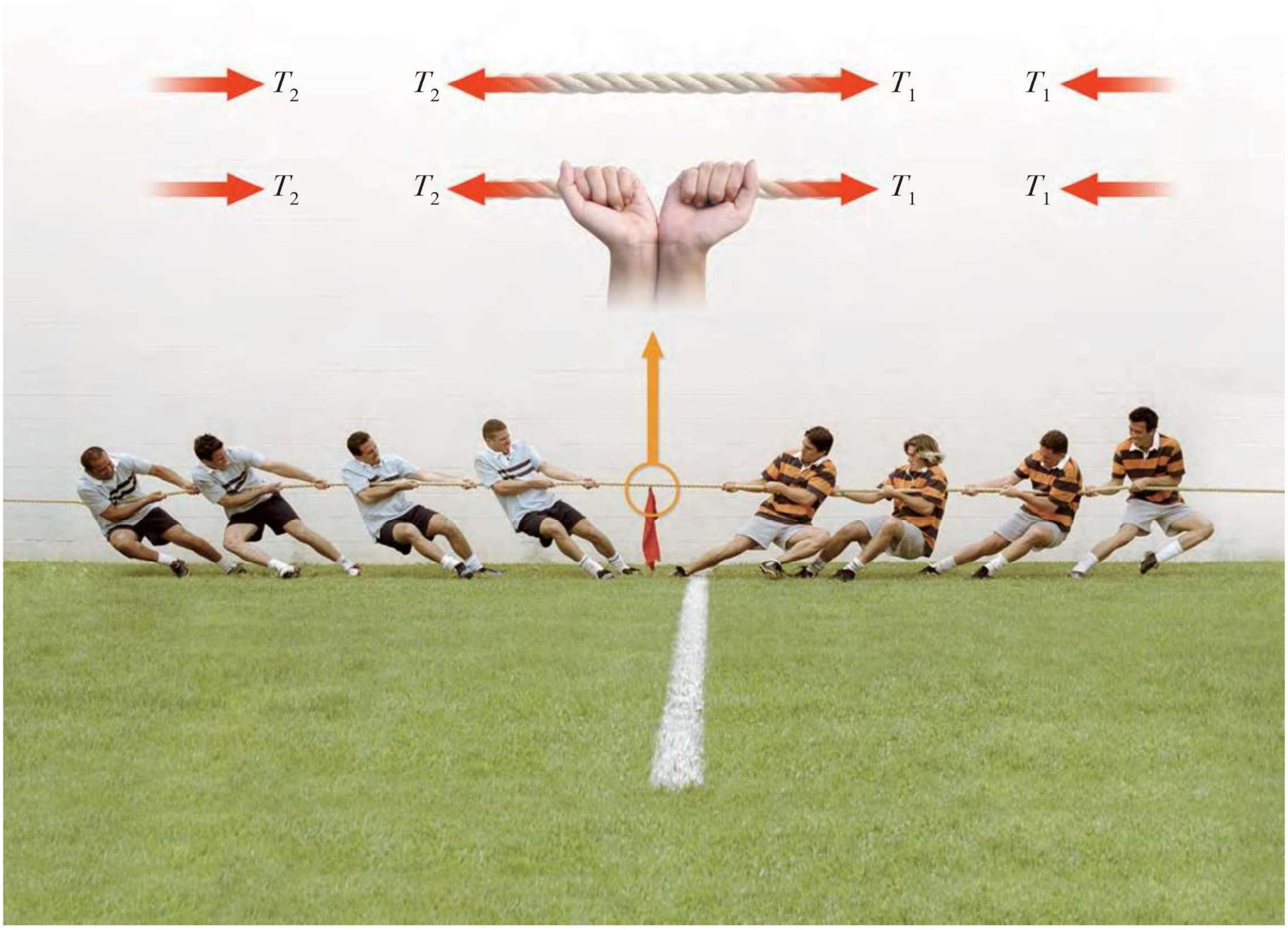
而張力可以在繩中間接一彈簧秤，由彈簧秤的讀數得知。若有一繩質量可忽略，

兩端施以拉力（圖 4-16）。為了簡單起見，可將繩子縮短成只有中間一小段，由作用—反作用定律得知

1. 繩右端所受拔河者之拉力 T_1＝拔河者所受繩之拉力 T_1（右段部分）。
2. 繩左端所受拔河者之拉力 T_2＝拔河者所受繩之拉力 T_2（左段部分）。

若中間一小段繩的質量非常小，則 $T_1 = T_2$，否則該繩所受之淨力不為 0，繩之加速度會非常大，故繩子會受到朝向兩端的拉力在作用，此力即為張力。由輕繩之張力在每一處的量值皆相等，並藉著每一點緊密連接，而可將一端之施力傳至另一端。

▼ 圖 4-16　若繩子之質量可不計，則繩子每一小段之兩端所受之張力量值相等（$T_1 = T_2$）。（若將雙手取代中間一段之繩，可感受到雙手會受到朝向左、右方之作用力。）



$F_1 \rightarrow m_1\ m_2 \Rightarrow F_1=(m_1+m_2)a$

$\Rightarrow a=$

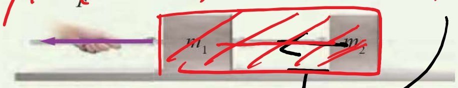
$F_{12} \rightarrow m_2$ 　 $F_{12}=m_2 \times a$

範例 4-6

兩金屬塊質量分別為 m_1 與 m_2，靜置於光滑水平面上，中間以細繩連接，若施以一外力 F 於此兩金屬塊，如下圖所示。求：

(1) 兩金屬塊之加速度 m_1+m_2 　 $F_1=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\dfrac{F_1}{m_1+m_2}$

(2) 金屬塊間繩子之張力。



m_2 　 $T=m_2 a$

概念 1. 質點之加速度與所受外力成正比（第二運動定律）。

2. m_1 作用於 m_2 之拉力量值＝m_2 作用於 m_1 之拉力量值＝繩之張力。

策略 1. 選定 m_1 質點，所受外力有拉力 F 及向右之繩張力 T。

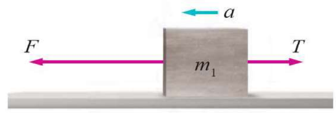
2. 選定 m_2 質點，所受唯一外力為向左之繩張力 T。

3. 分別列出 m_1 與 m_2 之第二運動定律。

4. 兩金屬塊具有相同加速度 a。

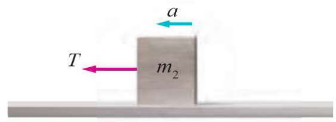
解 m_1 金屬塊的第二運動定律：

$F-T=m_1a_1=m_1a$ ……①



m_2 金屬塊的第二運動定律：

$T=m_2a_2=m_2a$…………②



(1) ①、②兩式相加，得 $F=(m_1+m_2)\,a$

故 $a=\dfrac{F}{m_1+m_2}$

(2) 由②式 ⇨ $T=m_2a=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}F$

應用 若將兩金屬塊視為單一質點，求兩金屬塊之加速度為何？

〔$F=(m_1+m_2)\,a$ ⇨ $a=\dfrac{F}{m_1+m_2}$〕

(2) m_2 : $T=m_2 g\sin\theta$ (3) m_1 : $F=T+m_1 g\sin\theta$

m_1+m_2 : $F=m_1 g\sin\theta+m_2 g\sin\theta$

範例 4-7

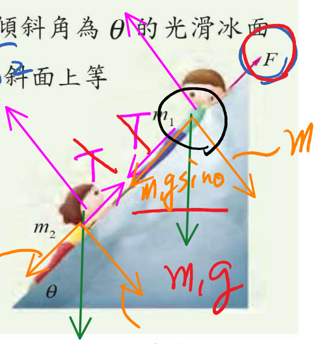
兩質量分別為 m_1 與 m_2 之登山者，以一繩子相連，趴在傾斜角為 θ 的光滑冰面上，如右圖所示，並有一沿著冰面向上的外力 F 使他們在斜面上等速移動，求：（以 m_1、m_2、g 與 θ 表示）

$a=0 \Rightarrow$ 合力 $F=0$

(1) 作用在 m_1 之正向力。 $N_1=m_1 g\cos\theta$

(2) 繩子之張力 T。

(3) 拉力 F。



概念 1. 物體等速移動，其加速度為 0。

2. 沿著斜坡的方向上，物體所受合外力（來自於重力、拉力與張力）為 0。

3. 在垂直於斜坡的方向上，物體所受合外力（來自於重力與正向力）為 0。

策略 1. 取沿著斜坡面之方向為 x 軸。

2. 選定 m_1 質點，繪出作用在 m_1 之所有作用力：重力 W_1、正向力 N_1、拉力 F 及張力 T。

3. 寫下在 x 與 y 方向上，m_1 之第二運動定律。

4. 選定 m_2 質點，寫下在 x 方向上，m_2 之第二運動定律。

解 (1) $F-W_1\sin\theta-T=F_{1x}=m_1a_x=0$ ……… ①

$N_1-W_1\cos\theta=F_{1y}=m_1a_y=0$ ………… ②

此處 W_1 為 m_1 所受之重力 m_1g，故由②式，得作用在 m_1 之正向力為 $N_1=m_1g\cos\theta$

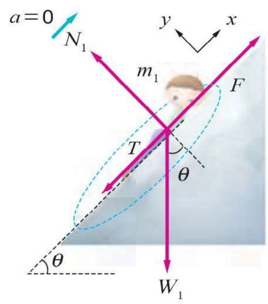
(2) 由於①式含兩未知數：拉力 F 與張力 T，因此，須再列出一相關方程式。由作用在 m_2 質點的運動定律

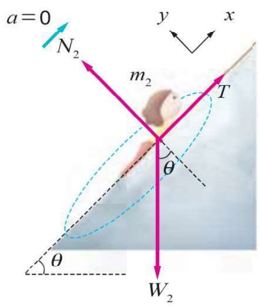
$T-W_2\sin\theta=F_{2x}=m_2a_x=0$

得 $T=m_2g\sin\theta$

(3) 將 T 值代入①式得

拉力 $F=W_1\sin\theta+T=(m_1+m_2)g\sin\theta$





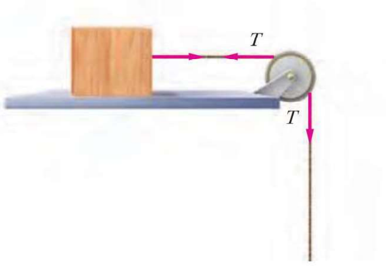
應用 若 $m_1>m_2$，則兩人中，誰在後方時，中間繩子較不易斷裂？

〔質量較小的 m_2 在後方時，中間繩子較不易斷裂〕

三、滑　輪

在工程技術上，還常使用滑輪作為簡單的機械，來達到方便的目的。一個理想的滑輪被視為無質量的光滑工具，它可以

1. 改變繩子的方向，因此也改變了繩子張力的方向。
2. 理想滑輪不會改變張力量值。因此在理想滑輪兩邊之張力相同（圖 4-17）。



▲ 圖 4-17　一個理想的滑輪會改變張力的方向，不會改變張力的量值。

$F=ma$

M: $T=M\cdot a$

m: $mg-T=ma$

①+② $mg=(M+m)a \Rightarrow a=\frac{mg}{M+m}$

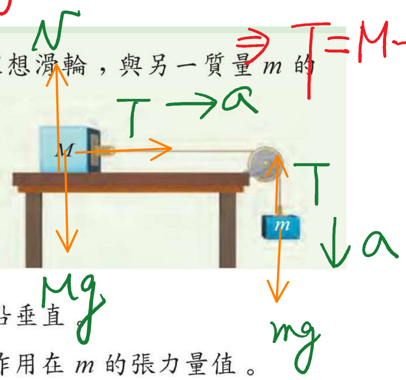
$\Rightarrow T=M\cdot\frac{mg}{M+m}$ #

範例 4-8

質量 M 的物體靜置於光滑水平面上，以細繩通過理想滑輪，與另一質量 m 的物體連接，如右圖所示。求：

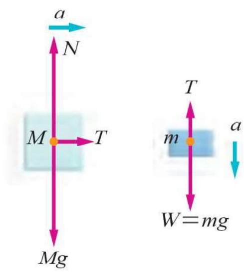
(1) M 之加速度。

(2) 繩之張力。　　　　【相關練習：習題 21、22】



概念
1. M 與 m 加速度方向不同，一沿水平、另一沿垂直。
2. 通過滑輪，繩作用在 M 的張力量值等於繩作用在 m 的張力量值。
3. m 所受之外力含重力 $W=mg$ 與張力。

策略
1. 選定 M 質點，寫下 M 質點所受之外力 F，及其第二運動定律式：$F=Ma_x$。
2. 選定 m 質點，寫下 m 質點所受之外力 F'，及其第二運動定律式：$F'=ma_y$。
3. 設繩子不收縮、不伸長，故 $a_x=a_y=a$。



解
(1) M 物體：$T=F=Ma_x=Ma$ …………①

m 物體：$mg-T=F'=ma_y=ma$ ……②

①、②兩式相加，得 $mg=(M+m)a \Rightarrow a=\frac{m}{M+m}g$

(2) $T=Ma=\frac{Mm}{M+m}g$

應用
何時 M 所受之拉力會近似於 m 所受之重力？

〔當 $m \ll M$ 時，則 $T=\frac{m}{1+\frac{m}{M}}g \approx mg=W$〕

甲42

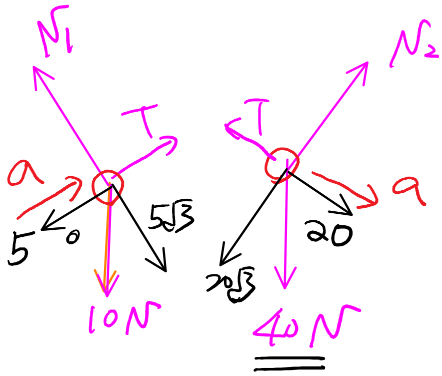
$F = ma$

$20 - 5 = (4+1)\,a$

$a = 3\ (m/s^2)$

$v_0 = 0$ $\quad t = 1$

$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



補充資料　運動定律 $F=ma$ 實驗的討論

問題探究

大部分高中與大學的物理實驗中，對牛頓第二運動定律的檢驗，都以在桌面上，將質量為 M 之滑車（或氣墊車，以減少摩擦力的影響）以細繩通過滑輪與質量為 m 之砝碼連接，即與範例4-8之裝置相似。滑車後接上紙帶穿過打點計時器，藉由在紙帶上的打點可求得滑車之加速度；改變砝碼之質量可影響滑車 M 與砝碼 m 所受之拉力。

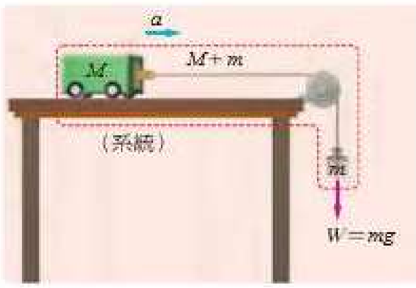
在分析上，若直接將 M 與 m 合成一物體，總質量為 $M+m$，所受之外力為砝碼 m 之重力 $W=mg$，故由第二運動定律

$$mg=F=(M+m)\,a$$

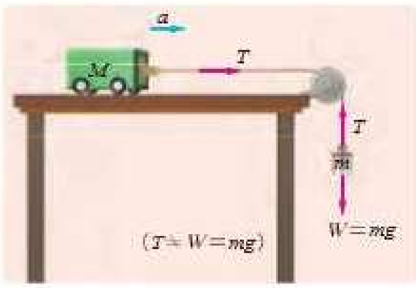
得知 $M+m$ 之加速度為（如圖(A)）

$$a=\frac{m}{M+m}\,g$$

雖然此結果無誤，但如將此結果直接用牛頓第二運動定律來解釋，並不符合牛頓第二運動定律的原意。因牛頓說物體的加速度方向應與外力方向相同，然而在實驗中滑車之加速度向右、外力 W 向下，故嚴格而言，以上作法並未正確地使用第二運動定律（如圖(A)與圖(B)）。



▲ 圖(A)：錯誤的示意圖。



▲ 圖(B)：正確的示意圖。