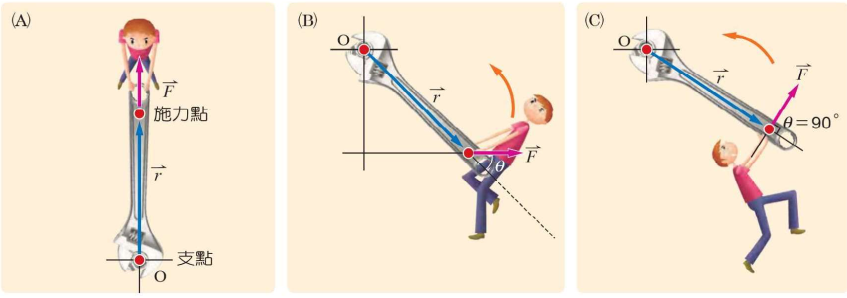
1、移動 ← 力F
轉動 ← 力矩τ { 力 / 轉軸・力臂

3-2 力矩與轉動平衡

一、力 矩

若只想用手指頭將被旋緊的螺帽轉開，幾乎是不可能的；而使用較短的扳手，雖有可能轉開螺帽，但仍需耗費不少力氣；若使用較長的扳手，就可以很輕鬆的轉開螺帽。由日常生活經驗得知，若手向著螺帽的方向推或拉，則完全無法產生旋轉的效果（圖 3-15(A)）；而斜向施力的效果（圖 3-15(B)）並不如沿著垂直於扳手軸方向施力（圖 3-15(C)）所生的效果好。由此可知，要產生旋轉效果不是只與施力的量值有關，也和施力的作用點（或施力點）到旋轉軸的距離，以及施力的方向有關。而要同時顯示出以上三種因素所造成使物體旋轉的效果，我們可以物理量 ── **力矩**（torque）τ 來代表。

τ
τ



▲ 圖 3-15 (A)沿力方向延伸會通過支點的拉力，無法產生旋轉效果。若施以相同的外力：(C)垂直扳手施力比(B)斜向施力所產生的旋轉效果來得好。

2.力矩

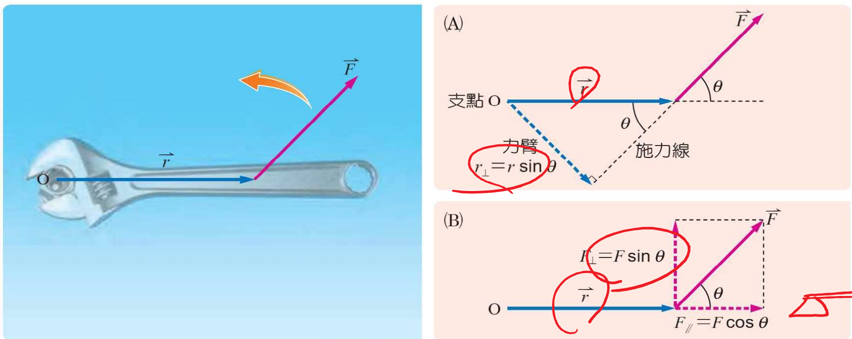
若通過施力的作用點與施力方向平行的直線，稱為施力的作用線（或施力線），則我們定義

$$\text{力矩} = \text{支點到施力線的垂直距離} \times \text{力} = \text{力臂} \times \text{力} \quad (3.12)$$

①　$r_\perp$

其中支點到施力線的垂直距離稱為力臂。如下頁圖 3-16(A)，以支點 O 為參考點（原點），作用力為 $\vec{F}$，原點至施力作用點的位置向量為 $\vec{r}$，兩者之間的夾角為 θ（取小於 180°），則力臂為圖中的 $r_\perp = r\sin\theta$，即 $\vec{r}$ 在垂直施力方向上的分量，所以力矩 τ 為

$$\boxed{\tau = r_\perp F} = (r\sin\theta)\,F \quad (3.13)$$



▲ 圖 3-16 計算力矩量值 τ 的兩種方式：(A) $\tau = r_\perp F = (r\sin\theta)F$；(B) $\tau = rF_\perp = r(F\sin\theta)$。

②

此外，也可以將 $\vec{F}$ 分解成平行與垂直 $\vec{r}$ 的兩個分力 $F_{/\!/}$ 與 $F_\perp$，且 $F_{/\!/} = F\cos\theta$，$F_\perp = F\sin\theta$。而 $F_{/\!/}$ 的力臂為 0，不產生力矩，$F_\perp$ 的力臂則為 r（圖 3-16(B)），所以力矩完全由 $F_\perp$ 所產生，即

$\Rightarrow \tau = r_\perp F_1$

$= r F_\perp$

$= r F_1 \sin\theta$

* $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
↓
外積
cross

$$\tau = rF_\perp = r(F\sin\theta) \qquad 3.14$$

m·N

m·kgw　cm·gw

與式（3.13）結果一樣。③

由式（3.12）可得，力矩的單位為長度的單位與力的單位相乘積，即為公斤重・公尺（kgw・m）或克重・公分（gw・cm）。　SI：m·N

④ 力矩也是向量，對固定轉軸的力矩只有兩個方向，即逆時針方向與順時針方向，習慣上 ⓐ 是逆時針方向為正方向、ⓑ 順時針方向為負方向。以圖 3-16 為例，所施力矩為沿逆時針的正方向。

計算力矩須同時考慮作用力的量值、方向及施力的作用點，一般常以支點為參考點。⑤ 實際上參考點可任意選定，不需要特別指定支點或轉軸為參考點，但若選定不同的參考點，參考點至施力作用點的位置向量 $\vec{r}$ 就不同，則計算出的力矩也就不一樣。ⓐ 故表示力矩時，除了力矩的量值、方向之外，應指出參考點的位置。

对…点的力矩
(轴)

$\tau_A=+F_1\frac{\sqrt{3}}{2}L+F_1\frac{1}{2}L+0$

$\tau_B=+F_1L$

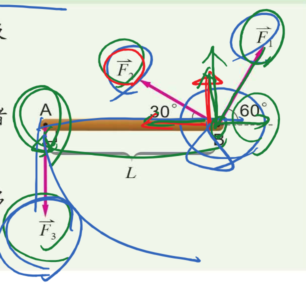
範例 3-4

如右圖，一長度為 L 的木棍同時受到 $\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$ 及 $\vec{F_3}$ 三力的作用，三力量值皆為 F，則：

(1) 若以 A 點為參考點，則 $\vec{F_1}$ 與 $\vec{F_2}$ 的力矩量值何者較大？三力對木棍的總力矩為多大？

(2) 若以 B 點為參考點，則三力對木棍的總力矩為多大？

【相關練習：習題 5.、12.】

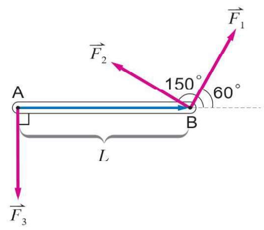


概念 1. 施力點之位置向量為由參考點指向施力點的距離大小與方向。

2. 力矩定義。

策略 力矩 $\tau=rF\sin\theta$。

解 (1) 以 A 點為參考點，$\vec{F_1}$ 與 $\vec{F_2}$ 施力點的位置向量皆為 $\overrightarrow{AB}$，$\vec{F_3}$ 的位置向量為零向量，如右圖，則三力產生的力矩依序為



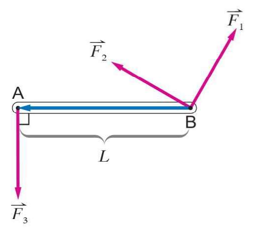
$\tau_1=L\cdot F\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}LF$，逆時針

$\tau_2=L\cdot F\cdot\sin 150^\circ=\frac{1}{2}LF$，逆時針

$\tau_3=0$

故 $\tau_1>\tau_2$，且總力矩為 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}LF$，逆時針。

(2) 以 B 點為參考點時，$\vec{F_1}$ 與 $\vec{F_2}$ 施力點的位置向量為 0，$\vec{F_3}$ 的位置向量為 $\overrightarrow{BA}$，如右圖，則三力產生的力矩為



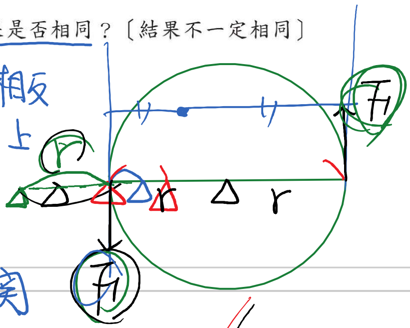
$\tau_1=\tau_2=0$

$\tau_3=L\cdot F\cdot\sin 90^\circ=LF$，逆時針

所以總力矩為 LF，逆時針。

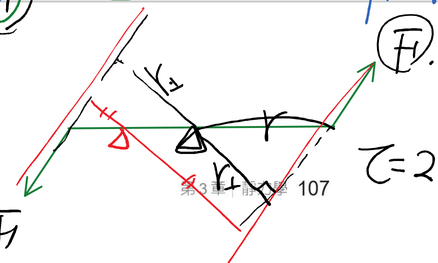
應用 若選定不同參考點計算力矩，其結果是否相同？〔結果不一定相同〕

3. 力偶：量值相等，方向相反而不作用在同一直線上的兩力
⇓
力偶矩與轉軸無關



$\tau=2rF_1$

$\tau=F_1r_1+F_1r_2=F_1(r_1+r_2)=F_1\cdot 2r$



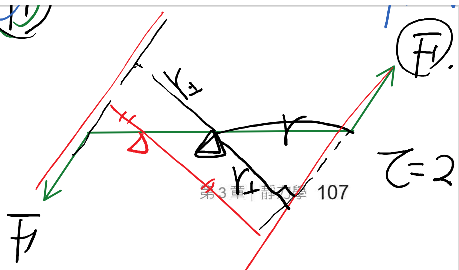
$\tau=2r_\perp F$

補充資料 力矩的向量表示與外積

概念延伸

事實上，力矩可以向量外積的意義清晰地表示出來。如右圖，$\vec{A}$、$\vec{B}$ 兩向量

力偶矩 與轉軸無關

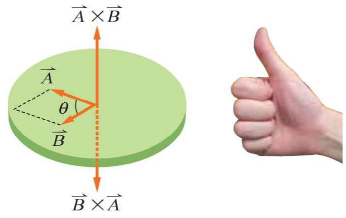


$\tau = 2r_\perp F$

補充資料　力矩的向量表示與外積

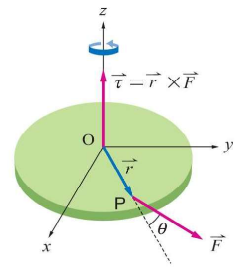
概念延伸

事實上，力矩可以向量外積的意義清晰地表示出來。如右圖，$\vec{A}$、$\vec{B}$ 兩向量的外積定義為一新向量，以 $\vec{A}\times\vec{B}$（唸成 $\vec{A}$ cross $\vec{B}$）表示，其量值為 $AB\sin\theta$，使右手四指由第一個向量 $\vec{A}$ 的方向，沿小於 180° 的夾角轉向第二個向量 $\vec{B}$，則右手拇指所指的方向，即為外積向量 $\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向，且 $\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向必同時與 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 兩向量垂直。由定義，則 $\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向與 $\vec{B}\times\vec{A}$ 的方向恰好相反。



由此，以原點為參考點可定義物體所受的力矩為施力點的位置向量 $\vec{r}$ 與施力 $\vec{F}$ 之外積。如右圖，若 $\vec{F}$ 作用在 P 點上，該點的位置向量為 $\vec{r}$，則力矩 $\vec{\tau}$ 為

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$



其量值為 $rF\sin\theta$，方向則在垂直 $\vec{r}$ 及 $\vec{F}$ 所在平面的方向，即沿著 z 軸方向。若以上圖右手拇指表示力矩方向，代表它使物體產生的轉動方向為沿著四指環繞的方向。

除了力矩以外，還有許多物理量均可以向量與外積來清楚表示，例如：物體轉動時的角速度、角加速度、角動量、運動電荷或載流導線在磁場中所受的力等，以後將會陸續介紹。

二、轉動平衡的條件

4. 一個原來靜止不轉動的物體，若外力對物體上任何一點所產生的合力矩均為 0，此物體將保持不轉動，稱此物體處於**轉動平衡**。即物體處於轉動平衡時，所受的**合力矩為 0**，或

$$\Rightarrow \vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\cdots\cdots+\vec{\tau}_n=\Sigma\,\vec{\tau}_i=0 \qquad \text{3.15}$$

for 任意軸(點)

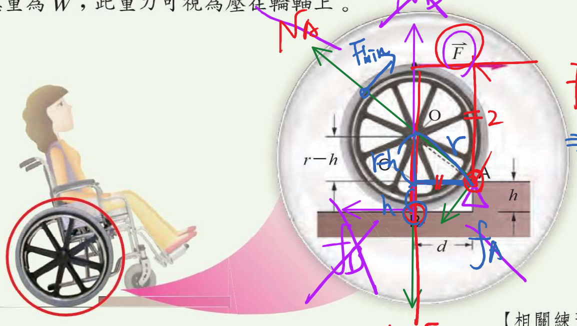
亦即對任一轉軸的力矩平衡時，逆時針方向的力矩和 $\tau_{逆}$，應等於順時針方向的力矩和 $\tau_{順}$，或

$$\boxed{\tau_{逆}=\tau_{順}} \qquad \text{3.16}$$

靜止的物體必處於轉動平衡狀態，但處於轉動平衡的物體不一定靜止，也可能處於等速轉動的狀態，此情形與平移平衡類似。

範例 3-5

護士欲將輪椅推上人行道高起的邊緣，護士至少應在輪上施多大的水平力 F？F 的施力點及方向，如下圖所示，已知輪的半徑為 r，人行道邊緣較路面高 h，人與輪椅總重為 W，此重力可視為壓在輪軸上。



$\tau_F = \tau_W$

$F(2r-h) = W\sqrt{r^2-(r-h)^2}$

$\Rightarrow F = W\cdot\dfrac{\sqrt{\;\;}}{2r-h}$

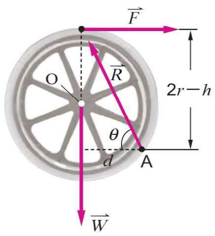
3-1 3-2 3-3　3-5

【相關練習：習題13】

概念 欲將輪椅推上人行道，須克服重力相對人行道邊緣的力矩。故施力的力矩應不小於重力的力矩。

策略

1. 分析輪受力有重力 $\vec{W}$、人施力 $\vec{F}$ 及人行道邊緣對輪的力 $\vec{R}$（如右圖）。
2. 以輪與人行道邊緣的接觸點 A 為參考點，作用力 $\vec{R}$ 的力矩為 0，分別計算重力 $\vec{W}$ 及施力 $\vec{F}$ 的力矩。
3. 順時針方向力矩（$\vec{F}$ 的力矩）應大於等於逆時針方向力矩（$\vec{W}$ 的力矩），則可得到最小施力。

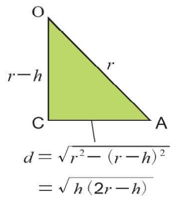


解 順時針力矩：$\tau_{順}=F\times(2r-h)$

逆時針力矩：$\tau_{逆}=W\times d=W\sqrt{h(2r-h)}$

$\tau_{順}\geq\tau_{逆}\Rightarrow F\times(2r-h)\geq W\sqrt{h(2r-h)}$

故 $F\geq W\sqrt{\dfrac{h}{2r-h}}$



應用 若不限定施力方向，則最小施力 F_{min} 為何？

〔$F_{min}\times 2r=W\times d\Rightarrow F_{min}=\dfrac{Wd}{2r}$〕

3-3 靜力平衡

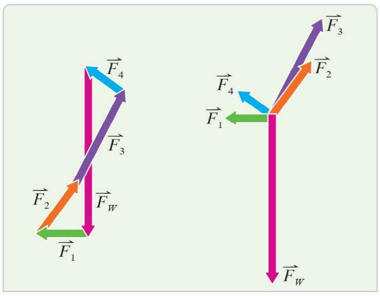
1、 原來靜止的物體若受多力作用而仍靜止，既不平移也不轉動，則此物體同時處於平移平衡及轉動平衡，或統稱為處於**靜力平衡**；此時物體所受的**合力為 0**，對任何參考點而言，物體所受的**合力矩亦為 0**。即

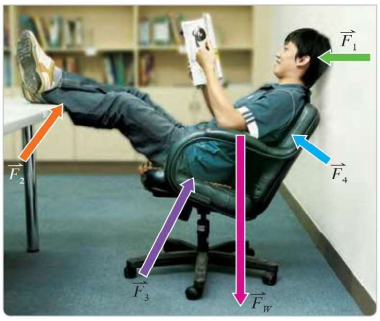
$$\begin{cases}\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots\cdots+\vec{F}_n=0\\ \vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\cdots\cdots+\vec{\tau}_n=0\end{cases}\qquad(3.17)$$

$F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+\cdots=0$

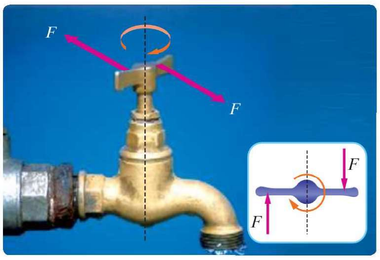
$F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}+\cdots=0$

$\Rightarrow \tau_{順}=\tau_{逆}$





▲ 圖 3-17　靜止的人所受之力應互相抵消，而達平移平衡；各力產生的力矩也應互相抵消，而達轉動平衡。



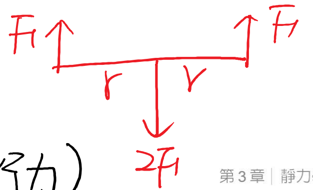
▲ 圖 3-18　力偶合力為 0，不使物體平移，但合力矩不為 0 可使物體轉動。

如圖 3-17，閱讀者處於靜止狀態，各個外力：牆壁、桌緣、椅墊、椅背的支撐力與人的重量（分別以 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$、$\vec{F}_4$ 與 $\vec{F}_W$ 來代表），雖然作用在人身上不同的位置，其合力必定為 0，而會使人處於平移平衡。同時，若任選一點為支點，如選定閱讀者重量的作用點（即重心，詳見 3-4 節）為支點，則 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_4$ 對該點所形成的逆時針力矩，應與 $\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$ 產生的順時針力矩相互抵消，而使人達到轉動平衡。

2、兩力的靜力平衡

必共点
必共面

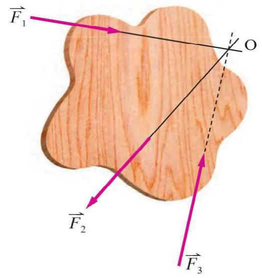
若物體僅受到兩力作用而達靜力平衡，此兩力①除了量值相等、方向相反以達到平移平衡外，合力矩還必須為 0，才能達到轉動平衡。如圖 3-18 的舊式水龍頭兩端，②受到量值相同、方向相反的兩個力 F，但因作用在不同點上，使水龍頭所受的合力矩不為 0，此稱為**力偶**（force couple）。力偶的合力為 0，可使物體達到平移平衡，水龍頭不會平移；但以任意點作參考點，合力矩卻不為 0，物體未達到轉動平衡的條件，因此可以轉動水龍頭。



必考 ✓ (非平行力)

3. 二、三力的靜力平衡 必考 ✓

若物體受到不平行的三力作用而達到靜力平衡時，因三力之合力 $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$，由於任何兩力，如 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 必定共處於一平面上，又因 $\vec{F}_3=-(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$，表示可以 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 在平面上之向量和之負值來表示 $\vec{F}_3$，① 所以三力必定共平面且可形成一個三角形。若任選其中兩力 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 的交點 O 為參考點，則此兩力的力矩為 0，總力矩僅為第三力 $\vec{F}_3$ 所產生的力矩。顯然，若 $\vec{F}_3$ 不通過 O 點，則合力矩必不為 0（圖 3-19）。因此，② 若不平行的三力可使物體處於完全不平移也不轉動的靜力平衡狀態，此三力之延長線必相交於一點。考



▲ 圖 3-19　以 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 的交點為參考點計算力矩時，$\vec{F}_3$ 方向亦須通過此點，合力矩才會為 0，達轉動平衡。

4. 達靜力平衡的系統內，若有多個物體，則對應每個物體作受力分析，最終應符合平衡條件。如圖 3-20 內，除人處於靜力平衡外，每個椅子皆應受力並處於靜力平衡。

處理靜力平衡問題時，很重要的一個步驟，就是必須能確認所有的作用力（包括作用點及方向）有哪些，否則會導致錯誤的分析結果，所以應對靜力平衡問題多作受力分析的練習。

➤ 圖 3-20　除人以外，每個椅子受力情形皆異，但仍達靜力平衡。

5. 靜力平衡問題的解題步驟：

1. 選取單一物體：標示出此物體來自環境的所有受力（不要畫出此物體對外界的施力），分析各力的作用點及作用方向。若不只一個物體，則逐一對每個物體作分析。這些力中，有些量值及方向為已知，其他則可能為未知待求。

受力体

2. 選取適當的 x-y 坐標系：將每個力分別沿 x 與 y 方向分解成兩分力，然後根據平移平衡，每個方向的合力應為 0。須注意沿坐標軸負方向的各分力應加上負號。

$\Rightarrow \Sigma F_x = 0$，$\Sigma F_y = 0$

3. 選取適當的參考點（軸）：對所有力求力矩，然後依轉動平衡，順時針方向的力矩和應與逆時針方向的力矩和相等。

$\Rightarrow \tau_{逆} = \tau_{順}$

4. 引用平移平衡及轉動平衡關係：在此兩關係式中，有些是未知量值的力，則可由解此聯立方程式求得。

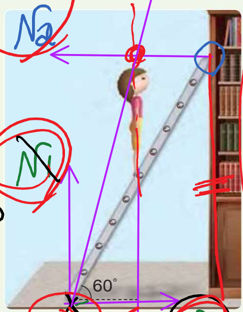
範例 3-6

小柔爬上梯子到達梯子中點，梯子與水平地面間的夾角為 60°，如右圖所示。若梯子的重量可以忽略不計，且書櫃與梯子的接觸面為光滑，小柔的重量為 W，求：

(1) 書櫃作用在梯子的力有多大？ N_2

(2) 地面作用在梯子的力有多大？ N_1 和 f_1 合力

(3) 地面作用在梯子的力方向是否沿著梯子？



(x): $f_1 = N_2$

(y): $N_1 = W$

(τ): $N_2 \cdot \ell \sin\theta = W \cdot \frac{\ell}{2} \cos\theta$

$\Rightarrow N_2 = \frac{W}{2} \cdot \frac{1}{\tan\theta} = \frac{W}{2}\cot\theta = f_1$

概念

1. 梯子處於靜力平衡，所受之合力為 0，合力矩為 0。
2. 梯子所受的外力有人作用在梯子上的力、書櫃作用在梯子的力、地面作用在梯子的力。

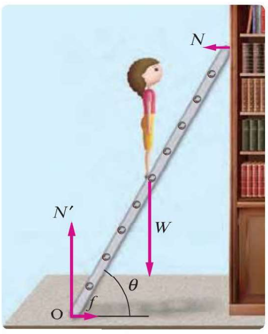
(3) $F = \sqrt{N_1^2 + f_1^2} = \sqrt{W^2 + \left(\frac{W}{2}\cot\theta\right)^2}$

策略 1. 選定梯子與地面的接觸點為參考點，利用合力矩為 0，計算出書櫃對梯子的作用力。

2. 書櫃與梯子的接觸面無摩擦力而只有正向力 N，且沿著垂直書櫃面方向，利用合力為 0，此正向力 N 應與地面給予的摩擦力 f 抵消；人作用在梯子上的力 W 應與地面給予梯子的正向力 N' 抵消。即作用在梯子的水平分力和與垂直分力和均為 0，則 $F_x = f - N = 0$，$F_y = N' - W = 0$。

3. 三力應相交於一點，藉此可決定地面作用力是否沿梯子方向。

解 如右圖，設書櫃作用在梯子的力為 N，地面作用在梯子的力 $\overrightarrow{F_{地}}$ 可分解為垂直方向的正向力 N'，及沿水平地面方向的摩擦力 f，梯子長為 L。



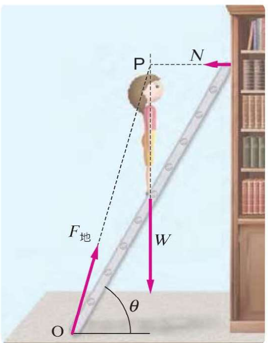
(1) 以 O 點為原點，則 N 產生的逆時針力矩與 W 產生的順時針力矩量值相等

$N \times L \sin\theta = W \times \frac{1}{2} L \cos\theta$

$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot W = \frac{\sqrt{3}}{6} W$

(2) $N = f$，$W = N'$，故地面作用在梯子的力量值為 $F_{地}$，則 $F_{地} = \sqrt{f^2 + N'^2} = \sqrt{N^2 + W^2}$

$= \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{6} W)^2 + W^2} = \frac{\sqrt{39}}{6} W$



(3) $F_{地}$、W 與 N 形成作用在梯子的三外力，由靜力平衡條件，$F_{地}$、W 與 N 之力方向須交於一點。由右圖可知，因 N 與 W 的交點 P 不在梯子上，故 $F_{地}$ 的方向應指向 P 並不是沿著梯子的方向。

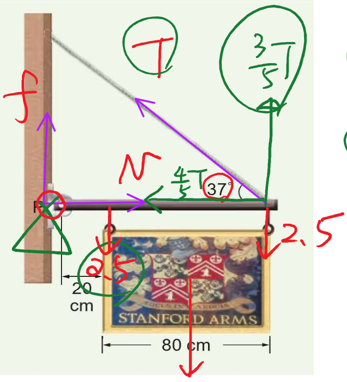
範例 3-7

右圖為一質地均勻的招牌，其重量為 5.0 kgw，長度為 80 cm，此招牌懸吊於一輕桿（重量可忽略），位置如右圖所示。輕桿連接於固定在牆上的活動樞鈕 P，輕桿的另一端以細繩繫於牆上上方，並使輕桿成水平靜止。試求出：

(1) 細繩的張力。

(2) 樞鈕對輕桿作用力的水平與垂直分力。

【相關練習：習題 15.、18.】



x: $\frac{4}{5}T = N$

y: $\frac{3}{5}T + f = 5$

τ: $\frac{3}{5}T \times 100 = 2.5 \times 20 + 2.5 \times 100$

$\Rightarrow T = 5$ kgw

$N = 4$ kgw

$f = 2$ kgw

概念 輕桿達靜力平衡，則作用於輕桿上的所有力之合力為 0，各力形成的總力矩亦為 0。

策略 1. 均質招牌的重量由招牌兩端連接點平均分擔。

2. 選定 P 為支點，利用合力矩為 0，或 $\tau_{逆} = \tau_{順}$，可求得繩拉力。

3. 不論 P 點受力的結果如何，總可以分解成水平與垂直分力，分別為 F_x 與 F_y。由桿的靜力平衡條件：合力為 0，得 $F_x - T_x = 0$，$F_y + T_y - W = 0$。其中 T_x 與 T_y 為繩拉力之水平與垂直分量，W 為物體的重量。

解 (1) 對 P 點而言，$\tau_{逆} = \tau_{順}$，或

$T \sin 37^\circ \times (80+20) = \frac{5.0}{2} \times 20 + \frac{5.0}{2} \times (80+20) \Rightarrow T = 5.0$ (kgw)

(2) 若 P 點所受的水平分力與垂直分力為 F_x 與 F_y

$F_x = T_x = 5.0 \cos 37^\circ$

$= 4.0$ (kgw)

$F_y = W - T_y = 5.0 - 5.0 \sin 37^\circ$

$= 2.0$ (kgw)