Youtube 標題：【吳銘數學】141-高三選修數學甲(上) |機率統計 II—二項分布—白努利試驗期望值變異數| 20160913 二恭。
授課教師：吳銘祥老師
影片內容：高三選修數學甲(上) 機率統計 II—二項分布—白努利試驗期望值變異數
課堂實境：20160913 二恭
發佈日期：2016 年 9 月 16 日
課堂講義：
影片長度：42min
影片網址：https://youtu.be/GJ0Y1FVitMk
吳銘祥老師數學教室：http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/...

丙、二項分布的性質

＊在參數是(n, p)的二項分布中，其成功次數 X的期望值和變異數會是多少呢？根據二項分布，出現正面 k 次的機率為

$$P(X=k)=C_k^4\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}=C_k^4\left(\frac{1}{2}\right)^4，\ k=0，1，\cdots，4.$$

以丟 1 枚均勻的硬幣 4 次為例：設隨機變數 X表示正面出現的次數，

由此得出正面出現的次數與其機率分別為

X	0	1	2	3	4
P					

根據上表，期望值________________

變異數________________

＊在一伯努利試驗中成功的機率為 p （ $0 \le p \le 1$ ），重複此試驗 n 次，n 次中成 功的次數 X 與其機率分別為

X	0	1	…	k	…	n
P	$C_0^n p^0 (1-p)^n$	$C_1^n p^1 (1-p)^{n-1}$	…	$C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$	…	$C_n^n p^n (1-p)^0$

根據上表，可計算出 n 次試驗中成功次數的
期望值 $E(X)$ 為________________

變異數 $Var(X)$ 為________________

標準差 $\sigma(X)$ 為________________

＊結論：**二項分布的期望值、變異數與標準差**

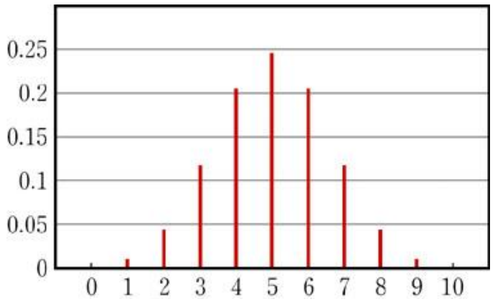
在參數是 (n, p) 的二項分布中（即重複做成功機率為 p 的伯努利試驗 n 次），若以隨機變數 X 表示成功的次數，則

(1) X 的期望值 $E(X) = np$.

(2) X 的變異數 $Var(X) = np(1-p)$.

(3) X 的標準差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

＊若 $X\sim B(n，p)$，則 X 有（$n+1$）種可能值，將這（$n+1$）種可能值對機率值畫圖，
則稱二項分布機率圖。
為了瞭解二項分布的性質，我們先將第例題 3 中的 $X\sim B(10，0.5)$的機率函數圖畫出如下，



從上圖可以看出此二項分布有單峰現象
（k 從 0 到 5 時機率值上升，k 從 5 到 10 的機率值下降 ）
且機率圖對 $k=5$ 對稱。

＊可以得出二項分布機率圖有特徵如下。

1. 單峰現象：

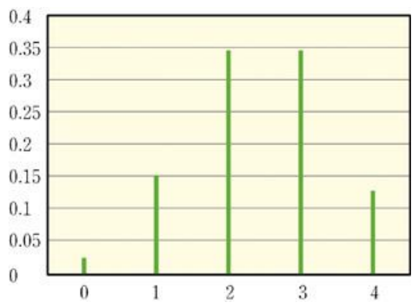
當成功次數 k 由 0 到 n，機率值 $P(X=k)$ 先上升後下降。

2. 最高點：

一般二項分布機率值 $P(X=k)$ 最高點是在 $k=[(n+1)p]$，其中 [ ] 表高斯符號，即 $[a]$ 表小於或等於 a 的最大整數。當（$n+1)p$ 為整數時，有兩個最高點分別在 $k=(n+1)p-1$ 及 $k=(n+1)p$，

例如：

$X \sim B(4，0.6)$，則 $(n+1)p=3$，最高點在 $k=2$ 及 $k=3$。



3. 對稱性：

二項分布的機率圖可能對稱，也有可能右偏或是左偏，決定於成功的機率值 p。如果 $p=0.5$，則圖形對稱；

如果 $p<0.5$，則圖形右偏；

如果 $p>0.5$，則圖形左偏。

範例1.

丟 1 枚均勻的硬幣 25 次，求正面出現次數的

(1)期望值、(2)變異數與(3)標準差．(4)正面出現幾次的機率最高

類題 1

重複丟 2 枚均勻的硬幣 300 次，以隨機變數 X 表示 2 枚硬幣都出現正面的次數，求 X 的期望值與標準差．