Youtube 標題：【吳銘數學】120-高二數學(下) |矩陣—線性變換介紹| 20160523 二勤。
授課教師：吳銘祥老師
影片內容：高二數學(下) 矩陣—線性變換介紹
課堂實境：20160523 二勤
發佈日期：2016 年 5 月 23 日
課堂講義：
影片長度： 34min
影片網址：https://youtu.be/Q_UNdk1zTXo
吳銘祥老師數學教室：http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/...

3-4 二階方陣對應的平面線性變換

甲、平面上的線性變換

何謂線性變換，

將平面上每一點 $P(x，y)$ 變換到 $P'(x'，y')$，其坐標關係式為$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$

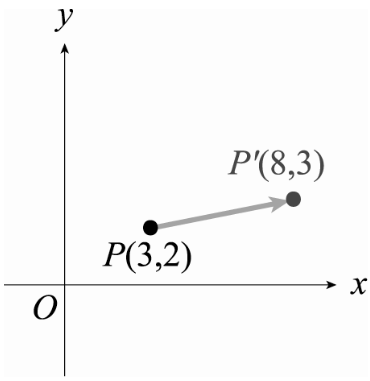
但是這樣的說法太不親民了，所以我們換個說法吧！

透過有系統的變換圖案上各個點的位置或角度，產生新的圖形轉換。

＊在坐標平面上，我們可以將點 $P(x,y)$ 依下面的關係式變換成點 $P'(x',y')$

$$P'(x',y')：\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=-x+3y \end{cases}.$$

這關係式可用矩陣表示為$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



透過這樣的變換，我們便可將每個點轉換到新的點位置

＊定義線性變換：

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$．在坐標平面上，

當點 $P(x,y)$ 依關係式 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 變換成點 $P'(x',y')$ 時，

我們稱二階方陣 A 將點 $P(x,y)$ 作線性變換到點 $P'(x',y')=\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ ……..①，

而點 $P'(x',y')$ 稱為點 $P(x,y)$ 的對應點（**也稱 P' 為 P 的像**）

①式的右邊是 x，y 的一次式，

①式稱為平面上的**線性變換**

①式亦可用矩陣的乘積表示成

＊平面上每一個“線性變換”都對應唯一的一個“二階方陣”。即

$\boxed{\text{線性變換}}$ $\xleftrightarrow{\text{“一對一”對應}}$ $\boxed{\text{二階方陣}}$

↓ ↓

$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。

所以每一個“二階方陣 A”在變換的意義下可視為平面上的“線性變換”。

本節為了便於運算，“點 $P(x，y)$”有時看成位置向量$\overrightarrow{OP}=(x，y)$ 或表示成，行矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

＊二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在線性轉換中，可以得到以下特性：

(1) 原點 O 映成原點 O，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

(2) x 軸上的單位點 $e_1(1，0)$ 映成 A 之第 1 行“行矩陣”所代表的點。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}。$$

y 軸上的單位點 $e_2(0，1)$ 映成 A 之第 2 行“行矩陣”所代表的點。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}。$$

＊**線性變換由兩點及其像點所決定**

給定不平行兩個向量 $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$，對平面上任意兩個像點 $\begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix}$，

則存在唯一的線性變換 A，使得

$$A\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}，A\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix}，其中 A=\begin{bmatrix} p_1' & q_1' \\ p_2 & q_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}^{-1}。$$

Q:肝不好要喝什麼?