

Youtube 標題：【吳銘數學】109-高二數學(下)|矩陣—列運算與圖形判斷|

20160429 二恭。

影片長度：13min

影片網址：<https://youtu.be/xnfVPSzK3k>

Youtube 標題：【吳銘數學】108-高二數學(下)|矩陣—矩陣列運算 x 高斯消去法|

20160428 二儉。

影片長度：21min

影片網址：https://youtu.be/KPGn31b_5Vg

吳銘祥老師數學教室：[http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/...](http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/)

而在國中數學及第二章都介紹過利用消去法解一次聯立方程式。這解法在聯立方程式的未知數不多時當然很好用，不過，當聯立方程式的未知數很多時，可能因為沒有固定的法則而顯得比較凌亂。現在，我們將由加減消去法中，各方程式係數間的運算，發展出一種系統化的方法來解一次聯立方程式我們亦可稱之為『演算法』。

乙、一次聯立方程式與矩陣的列運算

*解一次聯立方程式時，因為進行加、乘、交換的運算，所以會一再的改變聯立方程式，相對的，其增廣矩陣也會隨著一再的改變。而改變的主要還是係數，所以我們更可以只要以矩陣紀錄方式來表示即可。

下列我們將以往求解的消去法對照其增廣矩陣的表示

聯立方程式

增廣矩陣

$$\begin{cases} 2x - y + z = -4 & \textcircled{1} \\ x + y + 2z = 1 & \textcircled{2} \\ 3x + 5y + 9z = 8 & \textcircled{3} \end{cases}$$

①與②對調

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{1} \\ 2x - y + z = -4 & \textcircled{2} \\ 3x + 5y + 9z = 8 & \textcircled{3} \end{cases}$$

① $\times(-2)$ +②

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{1} \\ 0x - 3y - 3z = -6 & \textcircled{2} \\ 0x + 2y + 3z = 5 & \textcircled{3} \end{cases}$$

② $\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

第一列與第二列對調。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times(-2) \\ \leftarrow \times(-3) \end{matrix}$$

第一列乘以 (-2) 加到第二列，

第一列乘以 (-3) 加到第三列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow \times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

第二列乘以 $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 。

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{1} \\ 0x + y + z = 2 & \textcircled{2} \\ 0x + 2y + 3z = 5 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\downarrow \textcircled{2} \times (-2) +$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{1} \\ 0x + y + z = 2 & \textcircled{2} \\ 0x + 0y + z = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

第二列乘以 (-2) 加到第三列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即得知原聯立方程式與化簡後的聯立方程式 $\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \textcircled{1} \\ y + z = 2 & \textcircled{2} \\ z = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$ 即解為 $(x, y, z) = (-2, 1, 1)$

上述以矩陣解聯立方程式的過程中，包含了三種列與列之間的運算，我們把這三種運算統稱為矩陣的列運算。

* 矩陣的列運算時有幾點要注意：

- (1) 將矩陣中的某兩列互換位置。
- (2) 將矩陣中的某一行乘以一個不為 0 的數。
- (3) 將矩陣中的某一行乘以一個數後再添加到另一列。

這種解一次聯立方程式的方法稱為

高斯 (Carl Friedrich Gauss, 德, 1777~1855) 消去法

* 德國人喬登 (Wilhelm Jordan, 1842~1899) 提出高斯—喬登消去法，此乃結合高斯消去法而成，我們將三元一次聯立方程式的增廣矩陣連續作各種列運算，達到如下的目標：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix},$$

那麼就可以很快的得到此聯立方程式的解 $x = a$, $y = b$, $z = c$



範例3.

$$\text{利用高斯消去法解方程組} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2x - y + 3z = -1 \\ x + 4y + 5z = 14 \end{cases}$$

類題 1

$$\text{利用高斯消去法解聯立方程式} \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 9z = 5 \end{cases}$$

範例4.

$$\text{利用高斯消去法解聯立方程式} \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$$

類題 1

$$\text{利用高斯消去法解聯立方程式} \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+3z=7 \\ x+7y-6z=-4 \end{cases}$$



範例5.

試就實數 a 的值，討論下述聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+7y+2z=a \end{cases}$$

類題 1

設 k 為實數，且聯立方程式
$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-2y-3z=1 \\ 3x+2y-z=k \end{cases}$$
 有解，求實數 k 的值

