9-2 法拉第電磁感應定律

法拉第在 1831 年發表產生應電流的一些方法，並創造了磁力線的概念，雖然可以定性地描述電磁感應的現象，但是因為未能提出量化的數學表述，以致發表初期並不普遍為科學家所接受。

1845 年，德國物理學家諾伊曼（Franz Ernst Neumann, 1798-1895）從法拉第實驗和冷次定律出發，推想出電磁感應的數學表示式，式中引入應電動勢的概念。他認為應電流的產生是由應電動勢所造成的，就如同電池的電動勢可以在迴路上產生電流一樣。但若導線不能形成一個封閉迴路時，雖有電動勢的存在，在導線上仍不能出現應電流。

1. 法拉第電磁感應定律

在 1851 年，法拉第提出磁力線的概念，並用以解釋電磁感應的規律。到了 1855 年，馬克士威發表了他在電磁理論方面的第一篇論文，試圖為法拉第的磁力線模型提供數學基礎。他將諾伊曼所推想的數學式改以磁通量的方式來描述，逐漸形成了今天我們所熟知的電磁感應定律的形式，即**線圈中產生的應電動勢 $\mathscr{E}$ 等於線圈內磁通量 ϕ_B 隨時間 t 的變化率，稱為法拉第電磁感應定律**。若在時間 Δt 內，磁通量產生的變化量為 $\Delta\phi_B$，在此段時間之內的平均應電動勢，常以 $\mathscr{E}_{av}$ 或 $\overline{\mathscr{E}}$ 表示，其數學式為

$$\mathscr{E}_{av} = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \quad \text{9-3 式}$$

若（9-3）式中的時間 Δt 很小時，$\mathscr{E}$ 則可稱為瞬時應電動勢，其數學式為

$$\mathscr{E} = -\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \quad \text{9-4 式}$$

（9-4）式中的負號表示應電動勢所生成的應電流，其所形成的磁場會反抗線圈內原有磁通量的變化。若取磁通量的單位為韋伯（Wb），時間單位為秒（s），則應電動勢的單位就是伏特（V）。

小知識　法拉第電磁感應定律的數學式

諾伊曼、馬克士威使用的數學關係式為 $\mathscr{E}=-\dfrac{d\phi_B}{dt}$。

做一做

磁通量的單位為韋伯（Wb）、時間的單位為秒（s），請推導證明（9-4）式中，應電動勢的單位為伏特（V）。

如果封閉迴路是由 N 匝線圈所組成，且通過每一匝線圈的磁通量 ϕ_B 都一樣時，則迴路上產生的總應電動勢可視為是由 N 個單匝線圈上所生成的電動勢串聯而成，即當線圈內的磁通量發生變化時，N 匝線圈兩端的應電動勢應為

$$\mathscr{E}=-N\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \qquad \text{9-5 式}$$

範例 9-1

如圖 9-7 所示，一個水平放置的 100 匝圓形封閉線圈，其總電阻為 50Ω。在線圈所包圍的面積內原有磁場的方向向下，磁通量為 2.5×10^{-5} Wb；在 0.0010 s 的時間內，線圈內的磁場突然改變方向，且磁通量改變為 3.0×10^{-5} Wb，則在此段時間內

(1) 線圈中所產生的平均應電動勢為何？

(2) 設此段時間內的應電流為一定，則該應電流的大小與方向為何？

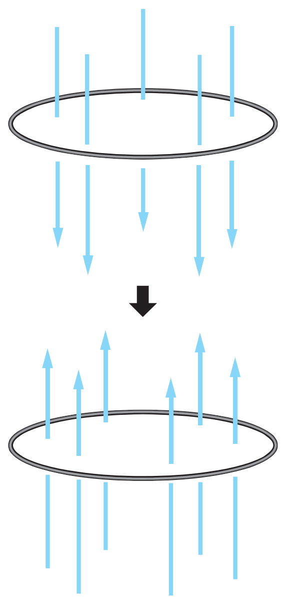


圖 9-7

[解答] (1) 線圈中所產生平均應電動勢的大小為

$$|\mathscr{E}_{av}| = \left| -N\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \right|$$

$$= 100\times\frac{(3.0\times10^{-5}\ \text{Wb})-(-2.5\times10^{-5}\ \text{Wb})}{0.0010\ \text{s}}$$

$$= 5.5\ \text{V}$$

(2) 應電流的大小為

$$I=\frac{|\mathscr{E}_{av}|}{R}=\frac{5.5\ \text{V}}{50\ \Omega}=0.11\ \text{A}$$

另由冷次定律知，線圈內增加向上的磁通量時，應電流的方向應為順時針方向（由上往下看），用以反抗線圈內磁通量的變化。

範例 9-2

如圖 9-8 所示，在一磁場方向為鉛直向下的均勻磁場 $\vec{B}$ 中，有一電阻為 R 的直導線，在一水平光滑且無電阻的固定 U 形金屬軌道上，施力使其以等速度 $\vec{v}$ 向右滑動。若已知兩平行軌道之間的距離為 L，則

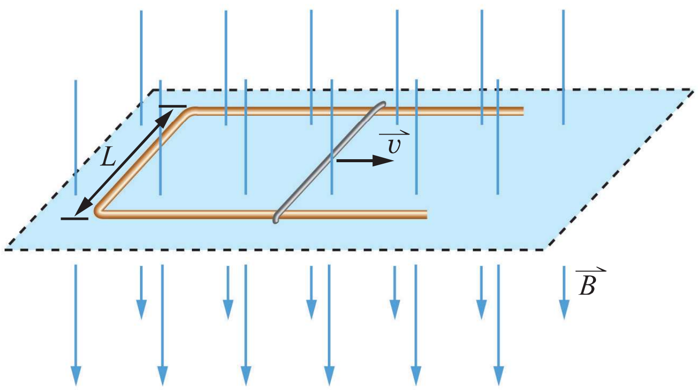


圖 9-8

(1) 在導線和 U 形金屬軌道所構成的迴路中，產生應電動勢的大小為何？

(2) 直導線所受的磁力為何？

(3) 欲使直導線維持等速運動，需有外力作用於直導線上，此外力所輸入的功率為何？

(4) 直導線產生的耗電功率為何？

[解答] (1) 如圖 9-9 所示，在 Δt 時間內，直導線所掃過的面積為 $\Delta A = L(v\Delta t)$，故迴路所包圍面積中磁通量的變化量為 $\Delta\phi_B = B\Delta A = BL(v\Delta t)$，

因此在迴路中所產生應電動勢的大小為

$$\mathscr{E} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{BL(v\Delta t)}{\Delta t} = vBL$$

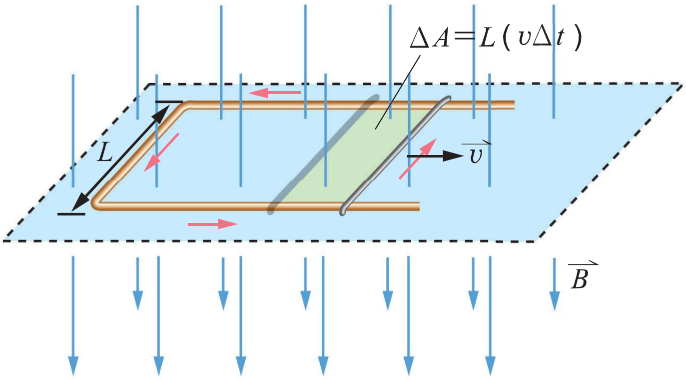


圖 9-9

(2) 在迴路中所生成的應電流 $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = \dfrac{vBL}{R}$，其方向依冷次定律可推斷應為逆時針方向。則此段載流直導線在磁場中所受的磁力應為 $F_B = ILB = \dfrac{vB^2L^2}{R}$，方向為向左。

(3) 欲使直導線維持等速運動，所需的外力量值為 $F = F_B = \dfrac{vB^2L^2}{R}$，方向為向右。故外力所輸入的功率為 $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \dfrac{v^2B^2L^2}{R}$。

(4) 直導線上因電流通過電阻產生的耗電功率為 $P' = I^2R = \dfrac{v^2B^2L^2}{R}$。

想一想

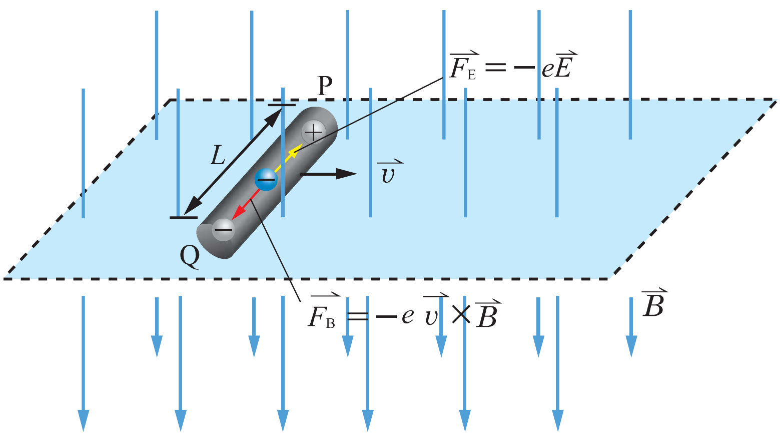
比較範例 9-2 的(3)、(4)兩小題，你認為這兩小題的答案為何相同？有何意義？

2. 直導線在磁場中運動產生的應電動勢

由範例 9-2 可知，迴路中產生的應電動勢，雖是由迴路所包圍的面積中磁通量發生變化所致；但顯然也可以看成是由直導線在磁場中運動而獲得。

如圖 9-10 所示，考慮長度為 L 的一段直導線，在均勻磁場 $\vec{B}$ 中，以等速度 $\vec{v}$ 垂直於磁場方向及導線長度方向運動。導線內帶電荷為 $-e$ 的自由電子隨著導線在磁場中運動時，受到磁力 $\vec{F}_B=-e\vec{v}\times\vec{B}$ 的作用。此力驅動導線內的自由電子向導線的 Q 端運動，並堆積在該處，而導線 P 端則累積等量的正電荷。因此在直導線內形成了電場，其強度隨著兩端電荷的累積而增加。電子同時受到向 P 的電力和向 Q 的磁力作用，當導體內的電荷重新分布而達成平衡時，電子所受的電力和磁力必定相互抵銷，即

$$\vec{F}_E+\vec{F}_B=(-e\vec{E})+(-e\vec{v}\times\vec{B})=0 \qquad \text{9-6 式}$$



▲ 圖 9-10　直導線垂直於磁場方向運動時，會使導線內的正負電荷分離，分別堆積在其兩端，形成電動勢。

式中$\vec{E}$ 為導線內部在電荷平衡時所建立的電場。由上式可得

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{9-7 式}$$

此電場的量值為 $E = |\vec{E}| = vB$。因此直導線 PQ 兩端的電位差應為

$$V_{PQ} = V_P - V_Q = EL = vBL \qquad \text{9-8 式}$$

若如圖 9-8 所示，將在磁場中運動的直導線兩端，跨接在 U 形金屬軌道上，使成一封閉迴路時，則會在迴路中產生應電流。直導線相當於一個直流電源，其 P 端為正極，而 Q 端為負極。當直導線中的可動電荷最後靜止時，其兩端之電位差即為其電動勢 $\mathscr{E}$，故

$$\mathscr{E} = vBL \qquad \text{9-9 式}$$

只要直導線維持等速運動，此應電動勢就繼續存在，故稱為**動生電動勢**（motional electromotive force）。當單獨一段直導線在磁場中運動時，此導線並沒有連結成為迴路，自然沒有發生被包圍的磁通量發生變化的情況；但是直導線上仍然產生應電動勢。法拉第將之解釋為**電動勢的產生可以由導線橫向切割磁力線而來**，其值等於在單位時間內所掃過的磁通量。雖然這是十九世紀的想法，但在應用上仍有一定的價值。

前述推算直導線在磁場中運動而產生應電動勢，與範例 9-2 使用迴路所包圍的面積中，磁通量發生變化而產生應電動勢，這兩種推導的方式雖然不同，但所得到的結果卻是相同。

想一想

1. 在圖 9-10 中，如果直導線的運動方向和磁場方向平行，則導線上產生的電動勢為何？
2. 如果直導線的運動方向和磁場方向垂直，但導線與磁場方向平行，則導線上產生的電動勢為何？

範例 9-3

如圖 9-11，寬度為 a、長度為 b、電阻為 R 的矩形線圈，以等速度 $\vec{v}$ 橫向穿過一長度為 $2b$ 的均勻磁場 B。當線圈恰要觸及磁場的時候，開始計時，則線圈上產生的應電流 I 隨時間 t 變化的函數關係曲線為何？

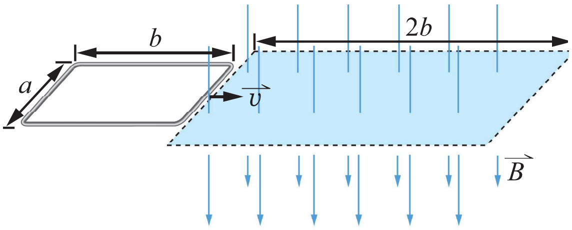


圖 9-11

[解答] (1) 在 $0 < t < \dfrac{b}{v}$ 時，如圖 9-12(a)所示：僅有部分的線圈面積進入磁場，線圈內的磁通量變化為

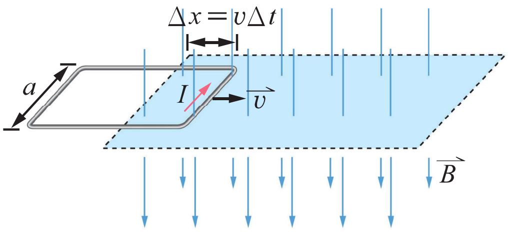
$\Delta\phi_B = B\Delta A = B(a\Delta x)$

$\quad = B(av\Delta t)$，

故在線圈上所產生應電動勢的大小為

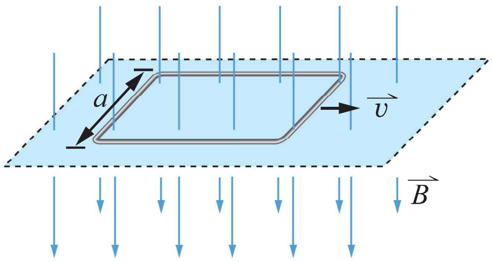
$\mathscr{E} = avB$，線圈上的應電流為

$I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = \dfrac{avB}{R}$，方向為逆時針方向。



(a)

(2) 在 $\dfrac{b}{v} \le t < \dfrac{2b}{v}$ 時，如圖 9-12(b)所示：線圈已完全進入磁場中，線圈內的磁通量沒有任何變化，故應電動勢為零，沒有應電流產生，即 $I = 0$。

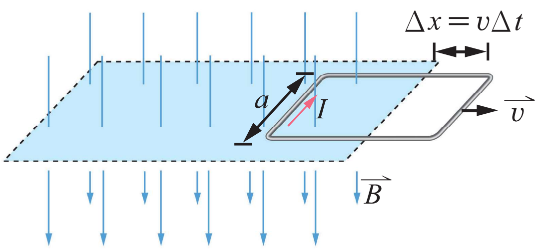


(b)

(3) 在 $\dfrac{2b}{v} \le t < \dfrac{3b}{v}$ 時，如圖 9-12(c)所示：已有部分的線圈面積穿出磁場之外，線圈中的磁通量變化為

$\Delta\phi_B = -B\Delta A = -B(av\Delta t)$，

式中負號表示磁通量減少。



(c)

圖 9-12

故在線圈上所產生應電動勢的大小為 $\mathscr{E}=avB$，線圈上的應電流為

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{avB}{R}$$，方向為順時針方向。

綜合上述結果，若取逆時針方向的電流為正，順時針方向的電流為負，則線圈中電流 I 隨時間 t 的函數關係曲線，將如圖 9-13 所示。

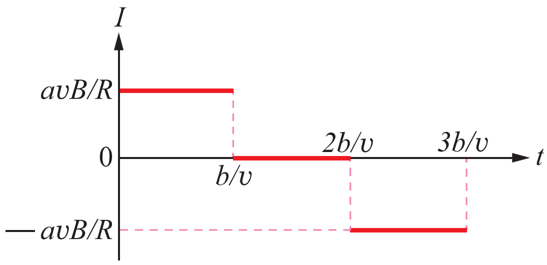


圖 9-13