

8-4 帶電質點在磁場中的運動

1. 帶電質點在磁場中所受的力

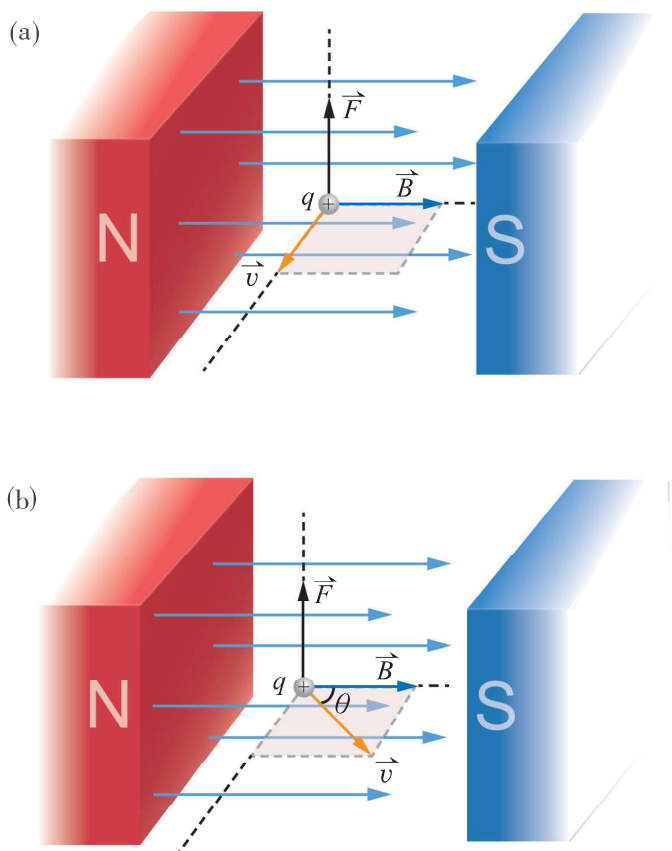
由前一節可知載流導線在磁場中會受磁力的作用，而電流乃是電荷集體移動形成，因此我們會想到載流導線之所以受力，會不會是由於導線內的電荷在磁場中運動受磁力的作用所致？

荷蘭人勞侖茲（Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928）在電子尚未發現之前的 1892 年曾提出理論。他指出電荷為 q 而速度為 \vec{v} 的帶電質點，在磁場 \vec{B} 中所受的磁力 F 量值為

$$F = qvB \sin \theta$$

8-11 式

10 式中 θ 為電荷速度與磁場方向之間的夾角，如圖 8-48 所示，這個理論後來經過實驗的證實。



◀ 圖 8-48 帶電質點在磁場中運動時受力的情形。(a)速度與磁場垂直時，受力量值為 qvB ；(b)速度與磁場夾角為 θ 時，受力量值為 $qvB \sin \theta$ 。

圖 8-49 中，帶電質點速度 \vec{v} 與磁場 \vec{B} 兩方向的夾角為 θ ，可將速度 \vec{v} 分解為平行磁場與垂直於磁場兩分量，即 v_{\parallel} 與 v_{\perp} ，其中 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 及 $v_{\perp} = v \sin \theta$ 。由

$$F = qvB \sin \theta = q (v \sin \theta) B$$

$$= qv_{\perp} B$$

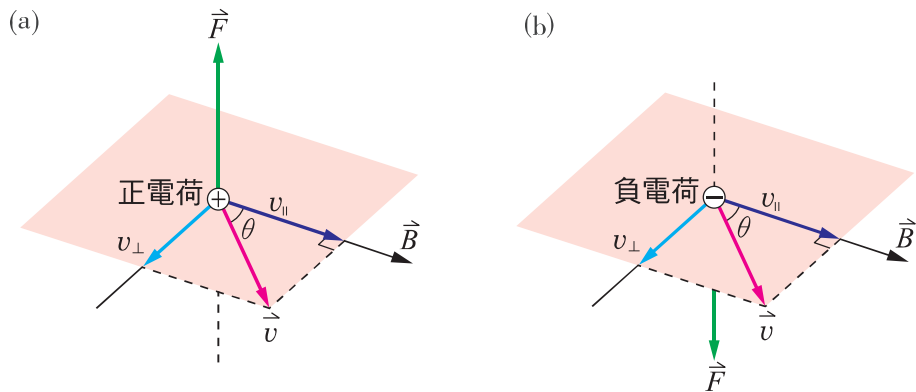
可以看出，造成對帶電質點之磁力正比於帶電質點的速度在垂直於磁場方向的分量 v_{\perp} ，而平行於磁場的速度分量 v_{\parallel} 並不產生磁力。

(8-11) 式中電荷所受的磁力 \vec{F} 的方向同時垂直於磁場 \vec{B} 和電荷的速度 \vec{v} 方向，此式可改寫成如下的向量積的數學形式，用以表示電荷所受磁力的量值及方向

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

8-12 式

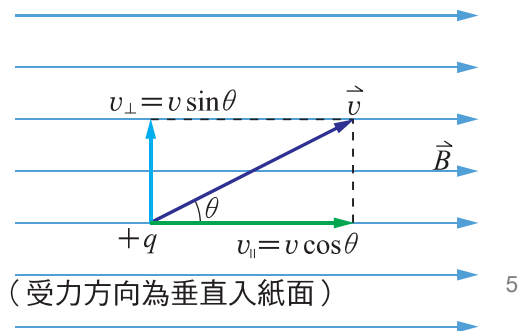
要注意的是電荷所受磁力的方向與電荷的正負有關，正電荷在磁場中運動時受磁力的方向即為 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向；而負電荷受磁力的方向則與 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向相反，如圖 8-50 所示。



▲ 圖 8-50 電荷所受磁力的方向與電荷的正負有關。(a)正電荷所受的磁力為 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向；(b)負電荷所受的磁力與 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向相反。

(8-12) 式的磁力 \vec{F} 有時稱為勞倫茲力 (Lorentz force) ^註，式中電荷的單位為庫侖，速度的單位為公尺/秒，磁場的單位為特斯拉，而力的單位則為牛頓。

^註 帶電質點在電磁場所受的力 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E}$ 亦稱為勞倫茲力。



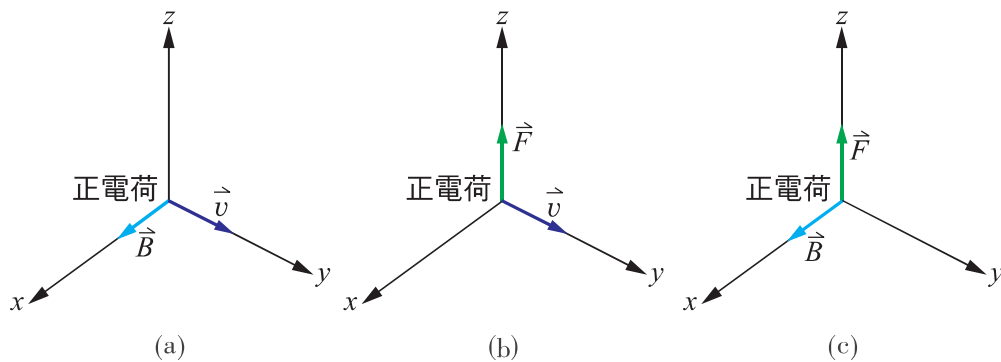
▲ 圖 8-49 帶電質點的速度在垂直於磁場方向的分量 v_{\perp} 造成磁力。



想一想

圖 8-51 (a)、(b)和(c)中各有直角坐標系，空間中有均勻磁場，一正電荷從原點起運動。

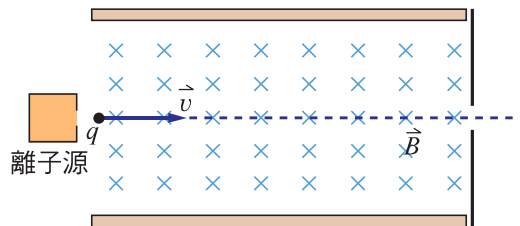
- (1) (a)圖已標示出磁場 \vec{B} 和質點初速 \vec{v} 的方向，請決定此時質點的受力方向。
- (2) (b)圖已標示出此時質點初速 \vec{v} 和受力 \vec{F} 的方向，請決定磁場所有可能的方向。
- (3) (c)圖已標示出磁場 \vec{B} 和此時質點受力 \vec{F} 的方向，請決定質點速度所有可能的方向。



▲ 圖 8-51

範例 8-11

如圖 8-52 所示兩平行金屬板間有均勻磁場 \vec{B} ，其量值為 $4.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ ，方向為入紙面。帶正電的粒子從離子源射出後，自左端向右進入磁場。



▲ 圖 8-52

- 5 (1) 正離子剛進入磁場時，所受磁力的方向為何？
- (2) 若欲使正離子筆直通過此場，可在此範圍內加上電場 \vec{E} ，求此電場的方向。(忽略重力的影響。)
- (3) 若此範圍內加上的電場為 $1.2 \times 10^4 \text{ N/C}$ ，可以使正離子筆直通過，求正離子的速率。

[解答] (1) 由磁力 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ 可知正離子所受的磁力方向向上。

(2) 因為正離子受磁力向上，故可施一電場使正離子受電力向下，使其所受合力需為零，而能筆直通過。正

電荷受的電力與電場方向相同，所以施加電場的方向為向下，如圖 8-53 所示。

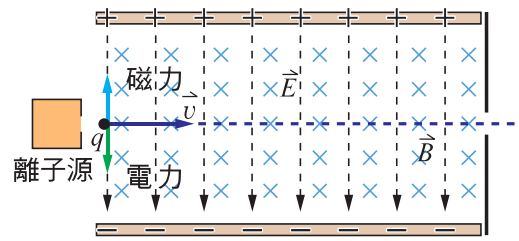
(3) 若正離子的電荷為 q ，所受電場的量值為 E ，正離子所受磁力的量值為 qvB ，電力需與磁力量值相等，即

$$qvB = qE$$

$$\text{故 } v = \frac{E}{B} = \frac{1.2 \times 10^4 \text{ N/C}}{4.0 \times 10^{-2} \text{ T}} = 3.0 \times 10^5 \text{ m/s}$$

由本題可知，如果需要某速度的帶電質點來進行實驗，則依據 $v = \frac{E}{B}$ ，只要適當調整所加的磁場和電場的比值，就可以得到所需速率的質點，相當於速率選擇器。

本題中帶電質點所受的電力和磁力的合力為零，即 $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$ ，可見帶電質點的電量 q 被約分了，亦即 $v = \frac{E}{B}$ 也適用於帶負電荷的質點。



▲ 圖 8-53

5

10

15

2. 帶電質點在均勻磁場中的運動

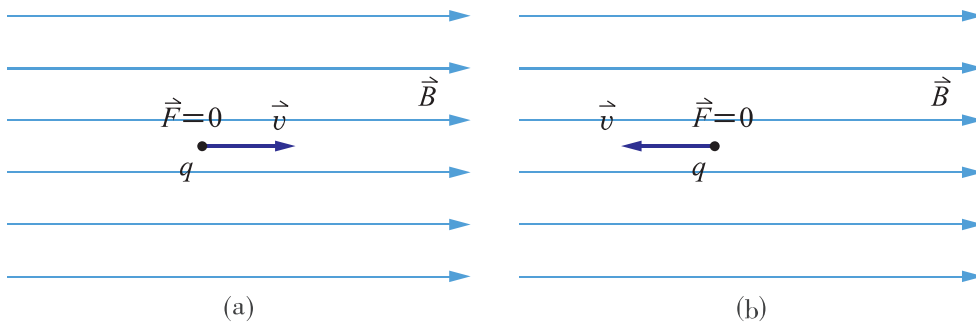
假設空間中僅有磁場，沒有電場，而且帶電質點的質量甚小，其所受的重力可以忽略。若帶電質點在磁場中靜止，質點並未受到磁力而保持靜止。若帶電質點在磁場中運動，則可能受到磁力作用。由於磁力的方向與質點的運動速度方向垂直，對質點不作功，不會改變質點的動能與速率。但是磁力對於質點的運動路徑有什麼影響呢？

空間中的磁場如果不是穩定的（穩定是指磁場不隨時間改變）或者不是均勻的（均勻是指各處的磁場皆相同），則運動的帶電質點所受的磁力較難處理，因此以下討論限於穩定且均勻磁場中的情況。

25

1. 帶電質點的速度方向與磁場平行

如圖 8-54 所示，(a)和(b)分別為帶電質點的速度方向與磁場相同或相反，兩方向的夾角為 0° 或 180° ，由 (8-11) 式知，質點所受磁力為零，故平行於磁場方向維持等速運動。



▲ 圖 8-54 帶電質點的速度方向與磁場(a)相同，或(b)相反時，所受磁力為零，做等速運動。

5 2. 帶電質點的速度方向與磁場垂直

在均勻磁場 \vec{B} 中有質量為 m ，電荷為 q 的帶電質點以速度 \vec{v} 垂直於磁場運動，如圖 8-55 所示。由 (8-12) 式知質點所受磁力的方向與速度垂直，僅改變速度的方向。

10 而磁力的量值為 $F = qvB$ ，維持不變。所以質點作等速圓周運動，磁力作為向心力，即

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

上式中的 r 為圓周的半徑，其值為

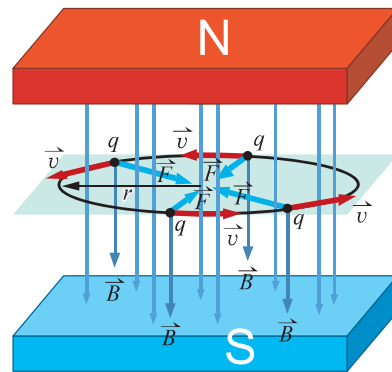
15
$$r = \frac{mv}{qB}$$

8-13 式

質點迴轉一周所需時間（即週期 T ）為

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{mv}{qB}$$

8-14 式



▲ 圖 8-55 帶電荷 q 的質點，其速度 \vec{v} 與磁場 \vec{B} 垂直時，所受的磁力 \vec{F} 作為向心力，使質點做半徑為 r 的等速圓周運動。

而質點每秒鐘迴轉的圈數稱為迴旋頻率 (cyclotron frequency)，以 f 表示，其值為

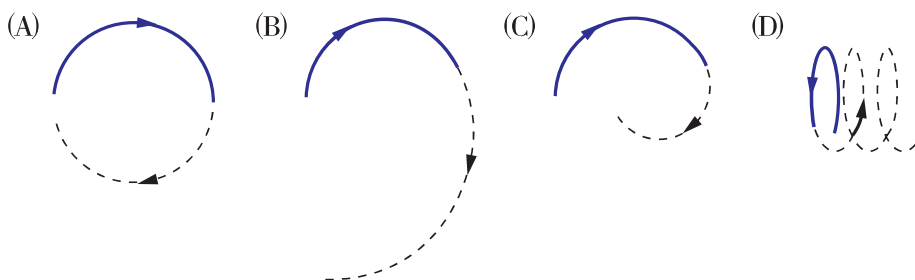
$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

質點迴旋之週期和頻率與電荷的質量、電量及磁場量值有關，但和電荷之速度無關。任何荷質比 q/m 相同的質點，在相同磁場 \vec{B} 中運動時，其迴旋週期與頻率均相同。



想一想

一帶電粒子在均勻磁場中作等速圓周運動，在某位置時突然與一不帶電的靜止粒子作完全非彈性碰撞（兩物體作完全非彈性碰撞後合為一體，碰撞前後瞬間總動量守恆。），下列四個圖，哪個是此粒子可能的運動路徑？（實線為碰撞前的路徑，虛線為碰撞後的路徑）



範例 8-12

一質子在與均勻磁場垂直的平面內作等速圓周運動，半徑 r 為 0.20 m。已知磁場的量值 B 為 0.30 T，質子的電量 q 為 1.6×10^{-19} C，質量 m 為 1.7×10^{-27} kg。求質子的動能。

[解答] 若設質子的質量為 m ，因質子在磁場中所受的磁力作為向心力，即

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \text{ 得 } mv = qBr = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.30 \text{ T})(0.20 \text{ m})$$

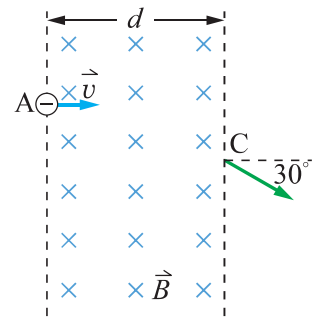
上式中的 mv 為質子的動量 p ，而動量與動能 K 的關係為

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m}, \text{ 故得質子的動能為}$$

$$K = \frac{[(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.30 \text{ T})(0.20 \text{ m})]^2}{2(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2.7 \times 10^{-14} \text{ J}。$$

範例 8-13

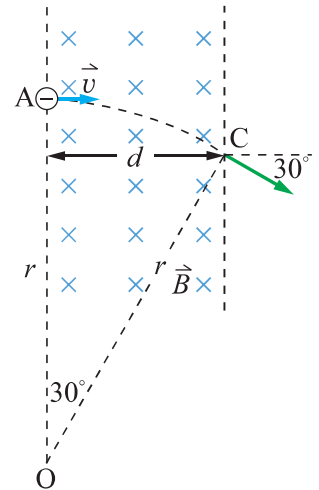
圖 8-56 中，兩虛線的間隔為 d ，其間有垂直入紙面的均勻磁場為 \vec{B} 。一帶有負電荷 $-q$ 的質點從左側的 A 點以速率 v 向右垂直入射此磁場，然後從右側的 C 點射出。射出時速度方向與原入射方向的夾角為 30° ，質點在磁場中運動路徑為一圓弧。求



▲ 圖 8-56

- (1) 圓弧路徑的半徑。
- (2) 質點的質量。
- (3) 質點從 A 至 C 所經過的時間。

10 [解答] (1) 參考圖 8-57，此帶電質點在均勻磁場中作等速圓周運動，A 至 C 的路徑為一圓弧。質點在 A 和 C 兩位置的速度方向為圓弧的切線方向，作垂直於此二位置的速度之直線，其交點 O 為圓心。由圖中的幾何關係可看出圓弧的半徑為



▲ 圖 8-57

$$r = d / \sin 30^\circ = 2d。$$

(2) 由 (8-13) 式 $r = \frac{mv}{qB}$ ，得質點的質量 m 為

$$m = \frac{qBr}{v} = \frac{2qBd}{v}$$

(3) 圓弧所對的圓心角為 30° ，為整個圓周的十二分之一，質點由 A 至 C 的時間 t 為圓運動週期 T 的十二分之一。

$$t = \frac{1}{12} T = \frac{1}{12} \frac{2\pi m}{qB} = \frac{1}{12} \frac{2\pi \left(\frac{2qBd}{v} \right)}{qB} = \frac{\pi d}{3v}$$

20

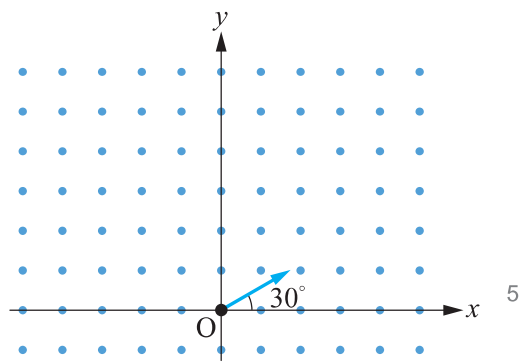
範例 8-14

如圖 8-58 所示，在大區域的均勻磁場 \vec{B} 中，一質量為 m 、電量為 $-q$ 的電荷以量值為 v 、方向與 $+x$ 軸夾成 30° 角的速度，垂直於磁場自原點 O 射出，試問

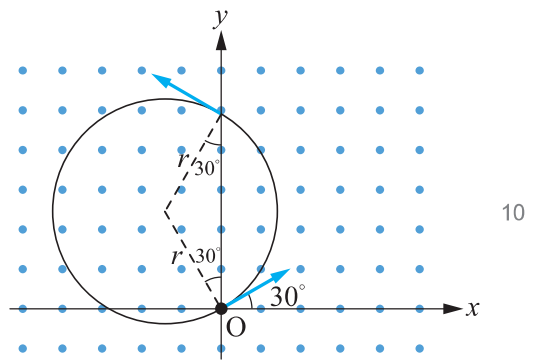
- (1) 經過多久時間此電荷首次通過 y 軸？
- (2) 此時其與原點之間的距離為何？

[解答] (1) 如圖 8-59 所示，電荷在磁場中作等速圓周運動，其半徑 r 必與速度方向垂直且 $r = \frac{mv}{qB}$ 為已知由此可定出圓心位置。當其通過 y 軸時，相當於繞圓心轉過 120° ，因此所需時間為 $t = \frac{T}{3} = \frac{2\pi m}{3qB}$ 。

(2) 此時與原點之距離為

$$d = \sqrt{3} r = \frac{\sqrt{3} mv}{qB}。$$


▲ 圖 8-58



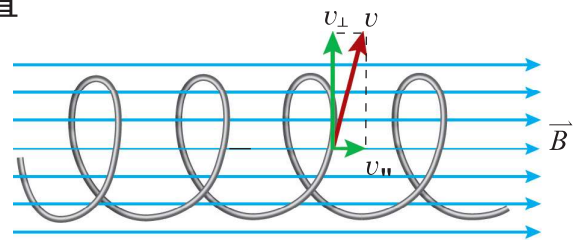
▲ 圖 8-59

5

10

3. 帶電質點的速度方向與磁場不平行也不垂直

若帶電質點在均勻磁場中運動時，其速度的方向與磁場不平行也不垂直，如圖 8-60 所示。我們可將速度 \vec{v} 分解成平行磁場的分量 v_{\parallel} 和垂直磁場的分量 v_{\perp} 。依據本小節第 1 和 2 小標的討論可知， v_{\parallel} 的分量會使帶電質點沿磁場方向作等速率運動，而 v_{\perp} 的分量會使質點垂直磁場方向作等速圓周運動。



▲ 圖 8-60 速度 \vec{v} 分解成平行磁場的分量 v_{\parallel} 和垂直磁場的分量 v_{\perp} 。其中， v_{\parallel} 的分量會使帶電質點作等速率運動， v_{\perp} 的分量使質點作等速圓周運動。因此帶電質點同時作這兩種運動，使其路徑成為螺旋線。

15

20

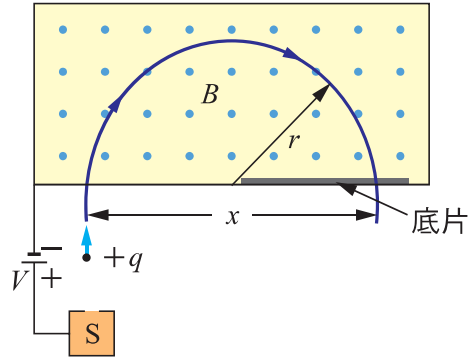
因此帶電質點同時作這兩種運動，致使其路徑成為螺旋線 (helix)。

3. 帶電質點在磁場中受力現象的應用

電荷在磁場中運動受力的現象有許多實際的應用，舉例如下：

1. 質譜儀

我們知道氧原子內有 8 個質子，但是穩定的氧原子內可能有 8 個、9 個或 10 個中子。像這樣質子數相同，而中子數不同的原子稱為同位素。質譜儀是利用帶電質點在磁場中受力的現象來測定同位素的質量或將它們分離的儀器。圖 8-61 所示為質譜儀原理的示意圖，圖中 S 為同位素正離子源，帶有正電荷 + q 的離子自靜止起，經由電位差 V 加速後垂直進入一均勻磁場 \vec{B} ，圖中磁場的方向為出紙面。正離子在磁場中作圓周運動而投射在底片上的位置與強度，可以分析同位素的種類與含量。

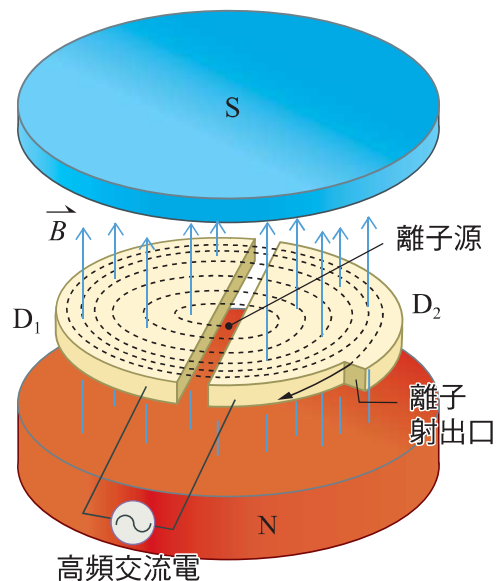


▲ 圖 8-61 質譜儀原理示意圖 - 由電荷在磁場中運動而投射在底片的位置與強度可分析同位素之種類與含量。

若離子的質量為 m ，由磁力作為向心力，得 $qvB = \frac{mv^2}{r}$ ，又離子的動能係由電位差加速 V 所得，
 $\frac{1}{2} mv^2 = qV$ ，將以上兩式消去 v ，可得離子的荷質比為 $\frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2}$ 。若離子的電荷已知，則可由測量之半徑 r 而求得其質量 $m = \frac{qB^2 r^2}{2V}$ 。

2. 迴旋加速器

在研究原子核內部結構時，常常需要能量很高的粒子來撞擊各種原子核。迴旋加速器就是可以讓帶電粒子獲得很大能量的一種裝置。而其基本原理就是利用電場使帶電粒子加速，並利用磁場使其偏轉。圖 8-62 為其原理示意圖，圖中兩片 D 形盒（標示 D_1 和 D_2 ）置於向上的均勻磁場中，兩盒間有一道間隙分開。當電荷從中心處垂直於間隙射進盒內時，會在磁場中



▲ 圖 8-62 迴旋加速器示意圖。

作圓周運動，當通過間隙時，適時施加電位差，在間隙中有電場，可使電荷加速。由 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 知粒子迴旋的週期保持不變，每隔固定的半個週期，間隙兩側之電位高低關係便交換一次（電場方向改變一次），電荷復經此間隙時可再次加速。電荷的速率逐漸增加，由 $r = \frac{mv}{qB}$ 可知其迴旋半徑也隨之增大，當達到最大半徑時，便從 D 形盒射出，進入實驗區以進行各種碰撞實驗。 5

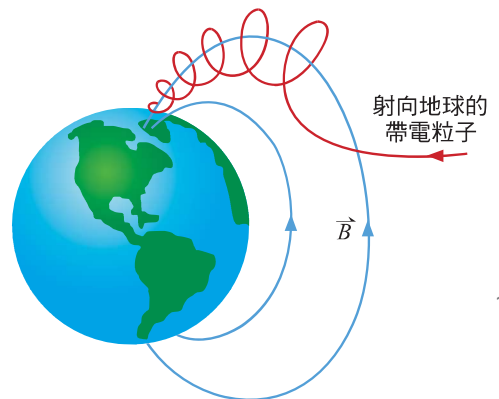


考慮相對論效應時的修正

依據本書附錄狹義相對論簡介可知：當粒子的速率非遠小於光速時，將呈現相對論效應，即粒子的質量會隨著速率的增加而變大，迴旋週期也會加大，並非保持固定。這將使得電場方向改變的週期與迴旋週期不再相同，造成無法確保粒子經過間隙時始終能獲得加速。改進的方法之一便是隨著粒子速率的增加，適當改變交流電源的頻率，使得電場方向的變化能與粒子迴旋的頻率保持同步。

3. 極光

當帶電的宇宙射線或來自太陽的帶電粒子（正電荷和負電荷粒子都有）朝地球射來時，會受到地球磁場的作用。雖然地磁不是均勻磁場，但是我們可以定性地瞭解。通常這些帶電粒子的速度有平行地球磁場之分量，會以螺旋線路徑向地球的南北兩極集中。但由於地球磁場並不均勻，因此其曲率半徑接近磁極時隨磁場增大而減小，如圖 8-63 所示。當這些大量高速帶電粒子與空氣中之氣體原子或分子碰撞時，使原子或分子游離。這些游離的原子或空氣分子（實際上是離子）再度與電子結合時，會發出光，形成極光，如圖 8-64 所示^註。地球磁場使這些帶電粒子的路徑偏折，使人類免於這些粒子的傷害。



▲ 圖 8-63 帶電的粒子受地磁作用，其軌跡為半徑不等的螺旋線。

◀ 圖 8-64 向兩極移動的大量高速帶電粒子與空氣碰撞產生極光。

^註 產生極光另外一個原因為原子內電子受激發，回至基態所釋放出之光子。

延伸閱讀

In-depth Readings

帶電質點的速度方向與磁場夾角為 θ

若帶電質點在均勻磁場中的速度 \vec{v} 的方向與磁場 \vec{B} 的夾角為 θ ，則可將速度分解成平行於磁場和垂直於磁場方向的兩個分量，即 v_{\parallel} 和 v_{\perp} ，其中 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ ，並不造成磁力；而 $v_{\perp} = v \sin \theta$ ，此分量產生磁力 \vec{F} 。磁力的量值為 $F = qvB \sin \theta$ ，方向與速度垂直，並不改變速度的量值。因此質點一方面在垂直於磁場的平面以速率 v_{\perp} （即 $v \sin \theta$ ）作等速圓周運動，另一方面又以速率 v_{\parallel} （即 $v \cos \theta$ ）平行於磁場作直線等速運動，其軌跡稱為螺旋線，如圖 8-65 所示。

由磁力作向心力得

$$qvB \sin \theta = \frac{m(v \sin \theta)^2}{r}$$

運動軌跡螺旋線的半徑 r 為

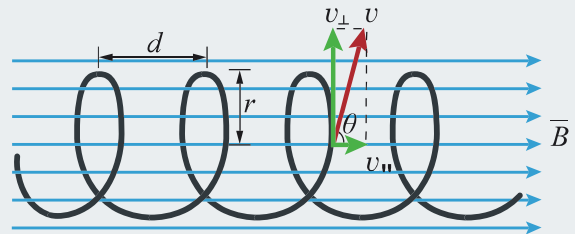
$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

繞行一圈的時間（週期） T 為

$$T = \frac{2\pi r}{v \sin \theta} = \frac{2\pi m}{qB}$$

週期與 (8-14) 式相同。質點繞行一周時，平行於磁場前進的距離稱為螺距 d ，

$$d = v_{\parallel} T = (v \cos \theta) \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$



▲ 圖 8-65 帶電質點的速度可分解成平行和垂直於磁場的兩分量（即 v_{\parallel} 和 v_{\perp} ），其 v_{\perp} 使質點作圓運動， v_{\parallel} 使質點沿磁場作直線運動，其合成效果使軌跡為螺旋線。