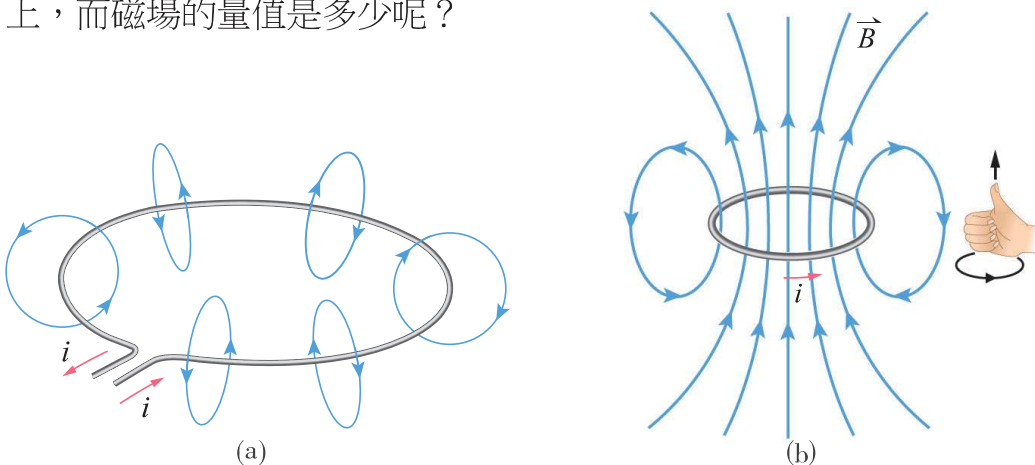


8-2 載流導線的磁場

本節我們將具體利用必歐－沙伐定律來計算幾種不同幾何形狀的載流導線所產生的磁場，如果數學處理的程度超出高中程度時，則僅列出其結果。

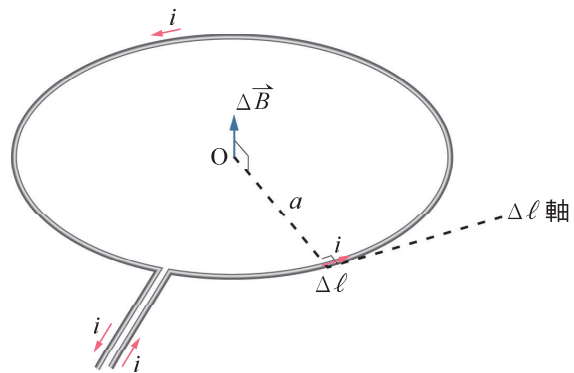
5 1. 載流圓形線圈中心的磁場

考慮圖 8-11 中的圓形線圈，當線圈通以電流時，根據必歐－沙伐定律，線圈上每一小段產生的磁場方向在圈內都是向上，如圖中各小段的磁力線所示。各小段在圓心處產生磁場的貢獻和之方向為垂直圈面向上，而磁場的量值是多少呢？



▲ 圖 8-11 (a)圖中載流圓形線圈每一小段產生的磁場方向在圓內都是向上；(b)整個線圈的電流在線圈內產生向上的磁場。

- 10 若通過圓形線圈的半徑為 a ，通過的電流為 i ，在圖 8-12 中，設線圈的圈任一小段 $\Delta \vec{\ell}$ 在圓心處產生的磁場為 $\Delta \vec{B}$ ，根據必歐－沙伐定律公式，其量值 $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell \sin \theta}{r^2}$ ，式
- 15 中的 r 為圓的半徑 a ，而 θ 為 $\Delta \ell$ 軸與該處半徑的夾角，顯然為 90° 。



▲ 圖 8-12 圖中載流圓形線圈中一小段 $\Delta \ell$ 在圓心產生的磁場量值為 ΔB ，方向向上。

所以

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell}{a^2}$$

圓周上每一小段產生的磁場方向相同，都是向上，所以把各小段的貢獻取向量和時，可以將量值直接相加，即圓心處的磁場 B 量值為

$$B = \Sigma \Delta B$$

5

$$= \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell}{a^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Sigma \Delta \ell}{a^2}$$

上式中的 $\Sigma \Delta \ell$ 為各小段的長度相加，也就是圓周長 $2\pi a$ ，故得圓心處的磁場 B 量值為

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a}$$

8-4 式 10

其方向為向上。

對於載流圓線圈在圓心所產生磁場的方向可用以下方式決定：右手四指沿電流方向彎曲，此時拇指伸出的方向即是線圈中心軸上的磁場方向，如圖 8-11 (b) 所示。

如果導線繞成 N 匝，則圓心處的磁場 B 量值成為 N 倍，而方向相同。 15

線圈內其他位置磁場的計算，則需要較繁雜的數學處理，超出高中的程度，不過基本原理是相同的。

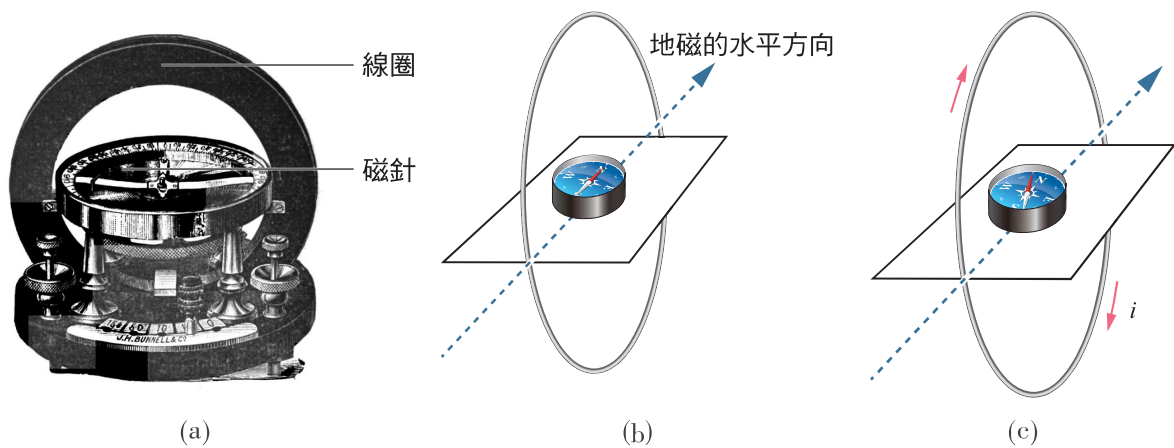


想一想

1. (8-4) 式是整個線圈在圓心所產生的磁場，半個線圈產生的磁場是否為 (8-4) 式的一半？
2. 若一條導線通以電流 i ，導線中有一段半徑為 a 的圓弧，此弧所對的圓心角為 θ (弧度為單位)，則此弧在線圈圓心處產生磁場的貢獻為何？

◎範例 8-2

1837 年科學家想到利用載流線圈和地磁的作用，來測定電流（如果地磁的水平分量為已知）或測定地磁的水平分量（如果電流為已知），圖 8-13 (a) 為此種裝置，稱為正切電流計；圖 (b) 和 (c) 為其原理簡圖，線圈鉛直豎立，中心處水平方向置一磁針，使磁針在地磁的南北方向。圖 (b) 中線圈未通電流，圖 (c) 則通以電流，磁針會偏一角度。設線圈有 10 匝，半徑為 0.20 m，通過電流後磁針偏轉了 30° ，若該處地磁的水平分量為 $4.5 \times 10^{-5} \text{ T}$ ，求通過的電流。



▲ 圖 8-13 (a) 正切電流計；(b) 線圈未通電流，磁針在地磁的水平方向；(c) 線圈通以電流，磁針偏轉。

[解答] 在圖 8-14 中，設地磁的水平分量為 B_e ，方向為指向地磁北極，也是線圈未通電流時磁針的方向。因為電流產生的磁場與地磁垂直，使磁針的 N 極偏轉 θ 角。若電流產生的磁場量值為 B ，則因

$$\tan \theta = \frac{B}{B_e}, \text{ 故 } B = B_e \tan \theta$$

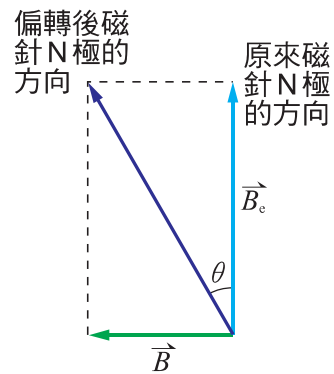
由題意 $B_e = 4.5 \times 10^{-5} \text{ T}$ ； $\theta = 30^\circ$ ，得 $B = (4.5 \times 10^{-5} \text{ T}) \tan 30^\circ$

$$= 2.6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

因為線圈有 10 匝，由 (8-4) 式知線圈中心的磁場為

$$B = 10 \times \frac{\mu_0 i}{2a} = (10) \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) i}{2(0.20 \text{ m})} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

故得 $i = 0.83 \text{ A}$



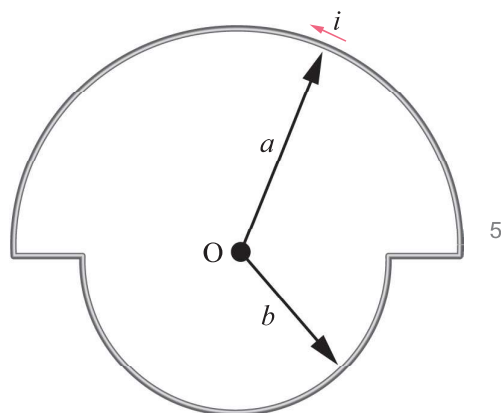
▲ 圖 8-14 B_e 為地磁的水平分量； B 為電流所產生的磁場，兩者同時作用在磁針，使磁針偏轉 θ 角。

◎範例 8-3

一形狀如圖 8-15 所示之封閉線圈，兩半圓的半徑各為 a 和 b 。若通以逆時針方向的電流 i 時，則圓心處 O 點的磁場為何？

[解答] 由必歐—沙伐定律知，兩小段載流直導線在 O 點所生磁場為零，而兩半圓上任一小段電流在 O 點所生磁場的方向均向外垂直於紙面，故在圓心 O 點處的磁場為兩者之和，即

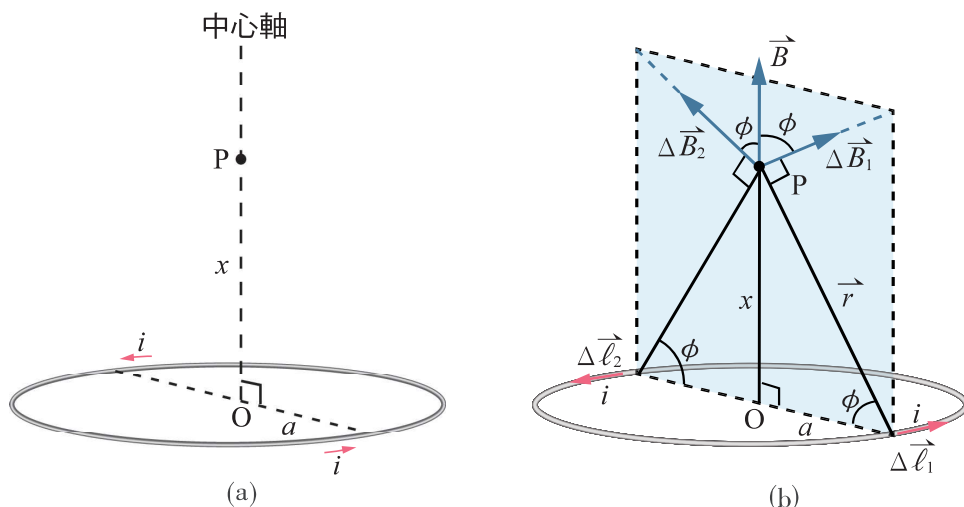
$$B = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2a} + \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2b} = \frac{\mu_0 i (a+b)}{4ab}, \text{ 方向為垂直出紙面。}$$



▲ 圖 8-15

2. 載流圓線圈中心軸上一點的磁場

圖 8-16 (a) 中，一載流圓線圈的半徑為 a ，通過的電流為 i ，電流方向標示於圖中。中心軸為過圓心 O 而垂直於圈面的直線， P 為中心軸上之一點， P 與 O 的距離為 x 。我們要計算此電流在 P 點所產生的磁場。



▲ 圖 8-16 (a) P 為載流圓線圈中心軸上之一點；(b) 求電流在 P 點產生的磁場時，分析兩小段電流 $\Delta \vec{l}_1$ 和 $\Delta \vec{l}_2$ 對磁場的貢獻圖。

如圖 8-16 (b)所示，考慮線圈中任一小段 $\Delta \vec{\ell}_1$ ，此小段至 P 的位置向量為 \vec{r} ，其量值為 $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ 。 $\Delta \vec{\ell}_1$ 在 P 點產生的磁場為 $\Delta \vec{B}_1$ ，由必歐-沙伐定律知其量值為 $\Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1 \sin \theta}{r^2}$ ，其中 θ 為 \vec{r} 與 $\Delta \vec{\ell}_1$ 兩向量的夾角，從圖中可以明顯看出 $\theta = 90^\circ$ 。故

$$5 \quad \Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1 \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1}{r^2}$$

$\Delta \vec{B}_1$ 的方向需同時垂直於 \vec{r} 和 $\Delta \vec{\ell}_1$ 。圖中淺藍色平面垂直於 $\Delta \vec{\ell}_1$ ，故 $\Delta \vec{B}_1$ 需在此平面上，並與 \vec{r} 垂直。圖中顯示出 $\Delta \vec{B}_1$ 的方向正符合所求，且遵守安培右手定則。

圖中與 $\Delta \ell_1$ 對應的長度相等之另一小段 $\Delta \ell_2$ ，在 P 點產生磁場的 $\Delta \vec{B}_2$ 之量值與 $\Delta \vec{B}_1$ 相同，兩者方向不同，與中心軸的夾角則相同，設夾角為 ϕ 。由對稱性可知， $\Delta \vec{B}_1$ 與 $\Delta \vec{B}_2$ 在垂直於中心軸的分量相等但方向相反，互相抵銷，而平行於中心軸的分量則相同。所以計算整個線圈在 P 點產生的磁場量值時，僅需將各小段 $\Delta \ell$ 產生的磁場 $\Delta \vec{B}$ 平行於中心軸的分量 $\Delta B \cos \phi$ 相加即可。故 P 點磁場的量值為

$$15 \quad B = \Sigma \Delta B \cos \phi = \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell}{r^2} \cos \phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Sigma \Delta \ell}{r^2} \cos \phi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i 2\pi a}{r^2} \cos \phi$$

由圖中很容易看出 $\cos \phi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ，代入上式得

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{8-5 式}$$

按照安培右手定則可知 P 點處磁場的方向向上。

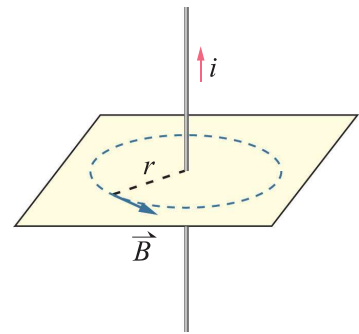
20 若 $x = 0$ ，則 P 即為線圈的中心點 O，由 (8-5) 式可得線圈中心的磁場，結果與 (8-4) 式相同。若 $x \gg a$ ，則 P 位於中心軸上距離線圈甚遠處，(8-5) 式中分母的 a^2 可以略去，故此處之磁場與 x 的三次方成反比。

3. 載流無限長直導線產生的磁場

圖 8-17 中，載有電流 i 的無限長直導線，在與導線相距 r 處所產生的磁場 \vec{B} ，可由必歐－沙伐定律計算求得。但由於計算過程涉及積分，超出本書程度，故此處僅引用其計算的結果，所得磁場的量值為

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{8-6 式}$$

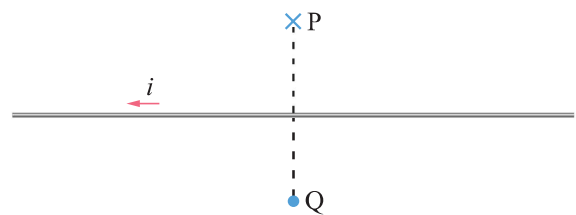
由上式可知，長直導線在空間中所生磁場的量值與導線的垂直距離成反比，而與電流的大小成正比。至於磁場方向則可由安培右手定則得知，是在以導線為軸心、半徑為 r 的圓周切線上，如圖 8-17 所示。



▲ 圖 8-17 載流長直導線所生磁場的方向沿著以導線為中心軸的圓周的切線方向。

5

圖 8-18 中無限長直導線在水平方向，電流由右方流向左方，且 P 和 Q 兩點至導線的距離相等。導線在此兩點產生的磁場量值相等，但是方向相反。P 點的磁場方向為垂直入紙面，通常以符號 \times 或 \otimes 表示此方向。Q 點的磁場方向為垂直出紙面，通常以符號 \cdot 或 \odot 表示此方向。



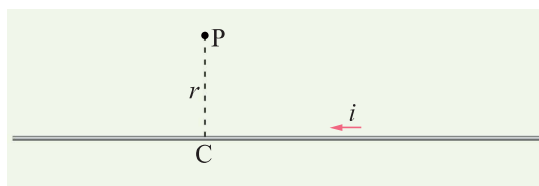
▲ 圖 8-18 載流無限長直導線在 P 和 Q 點產生的磁場方向相反

15

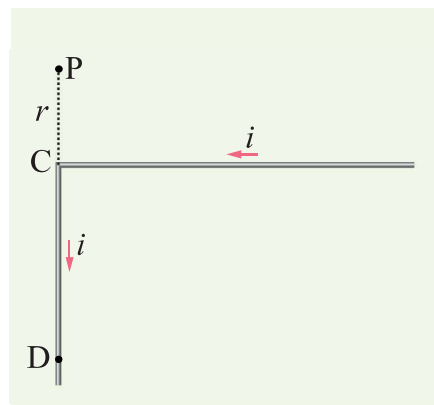


想一想

圖 8-19 (a) 中，一載流無限長直導線在 P 處產生的磁場量值為 B 。若將此導線在 C 點處彎折成直角，如圖 8-19 (b) 所示，圖中的 P 點位於 DC 的延長線上，P 處的磁場為 B' 。 B' 是否為 B 的一半？



(a)

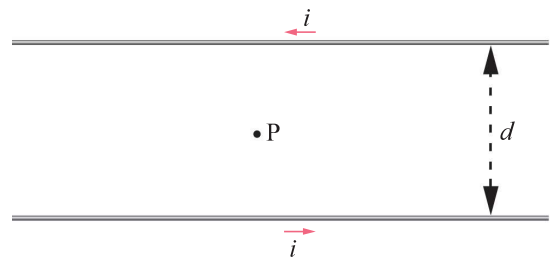


(b)

▲ 圖 8-19

範例 8-4

在圖 8-20 中，兩載流無限長直導線互相平行，相距 d ，電流同為 i 。圖中的 P 點在兩導線之正中間位置。



▲ 圖 8-20

5 (1) 若電流方向相反時，求電流在 P 點產生的磁場。

(2) 若電流方向相同時，求電流在 P 點產生的磁場。

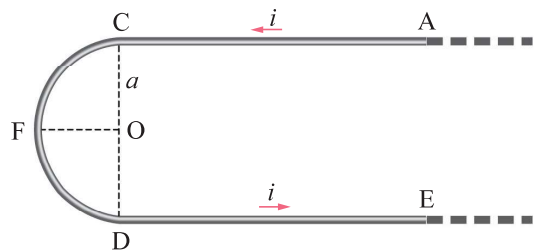
[解答] (1) 由安培右手定則知兩電流在 P 點產生的磁場方向相同，均為垂直出紙面的方向，而其量值也相等，均為 $\frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)}$ ，故 P 點的磁場量值為

10
$$B = 2 \times \frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)} = \frac{2\mu_0 i}{\pi d}。$$

(2) 若兩電流方向相同，則兩電流在 P 點產生的磁場量值相等，但是方向相反，故抵銷為零。

範例 8-5

15 在圖 8-21 中，一導線載有電流 i 從右方甚遠處至圖中 C 點時，導線彎成半圓形 CFD，導線在 D 點成為與原方向相反折回至甚遠處。若半圓的半徑為 a ，求圓心 O 點的磁場。



▲ 圖 8-21

[解答] O 點的磁場來自三個貢獻：

20 (1) 上面直導線電流產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ ，方向為垂直出紙面。

(2) 半圓部分產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2a}$ ，方向為垂直出紙面。

(3) 底下直導線電流產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ ，方向為垂直出紙面。

(與(1)相同)

O 點的磁場為這三者的向量和，即 $B = \frac{\mu_0 i}{2a} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) ，$

25 方向為垂直出紙面。

◎範例 8-6

圖 8-22 中有兩無限長直導線，相距 d ，通以相同的電流 i ，但是方向相反，其一方為垂直出紙面，另一方為垂直入紙面（設紙面為垂直於兩導線的平面）。圖中紙面上的 P 點在兩導線連線的垂直平分線上，與兩導線的連線中點距離為 x 。求兩導線在 P 點產生的磁場。

[解答] 參考圖 8-23，左邊電流在 P 點產生的磁場為 \vec{B}_1 ，

方向為垂直 PA，已標示於圖中，其量值為

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

式中的 $r = \sqrt{(d/2)^2 + x^2}$ ，即

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{(d/2)^2 + x^2}}$$

右邊電流在 P 點產生的磁場為 \vec{B}_2 ，方向為垂直 PC，也已標示於圖中，其量值與 B_1 相等。

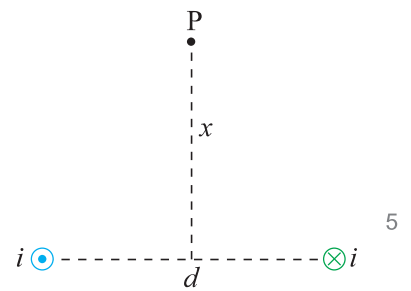
由對稱性可知， \vec{B}_1 與 \vec{B}_2 之向量和 \vec{B} 的方向為向上，其量值為

$$B = 2 B_1 \cos \theta$$

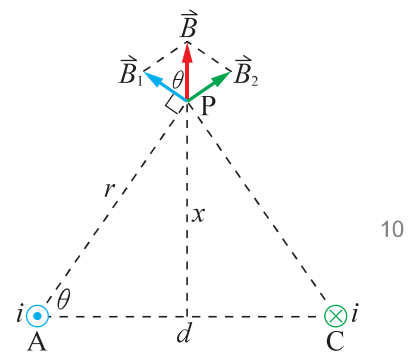
$$\text{因 } \cos \theta = \frac{(d/2)}{r} = \frac{(d/2)}{\sqrt{(d/2)^2 + x^2}}$$

故

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{(d/2)^2 + x^2}} \cdot \frac{(d/2)}{\sqrt{(d/2)^2 + x^2}} = \frac{2\mu_0 i d}{\pi(d^2 + 4x^2)}$$



▲ 圖 8-22

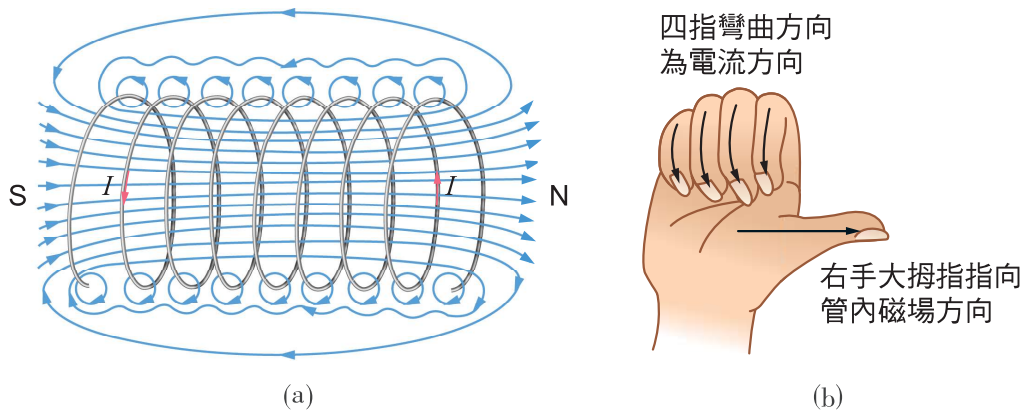


▲ 圖 8-23

4. 螺線管電流產生的磁場

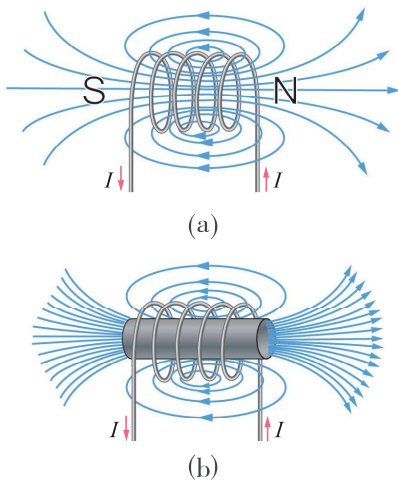
長導線所繞成的均勻螺旋形線圈，稱為螺線管（solenoid）。當螺線管載有電流時，在空間中任一點的磁場，為每一匝圓線圈所生磁場的向量和。如圖 8-24 (a) 所示，在管外各匝線圈所生的磁場有部分相互抵銷之現象，故磁場甚弱且不均勻。但在管內，各匝線圈所生磁場則有相加之趨勢，故其磁場甚強且相當均勻。管長愈長，且線圈愈均勻緊密纏繞，管內所生的磁場就愈均勻。

螺線管內的磁場方向與中心軸平行，可如圓線圈一般決定之，如圖 8-24 (b)所示。磁力線從螺線管的一端發出，再回到另一端，並由管內回到原出發點，形成一封閉曲線。螺線管內外的磁場分布與長磁棒相似，其發出磁力線之一端可視為 N 極，而另一端則可視為 S 極。



▲ 圖 8-24 (a)螺線管外側的磁場甚弱，管內磁場則甚均勻；
(b)管內磁場的方向可由右手決定。

5 如果在螺線管內插入一軟鐵心便成電磁鐵，如圖 8-25 所示。當螺線管未通以電流時無磁性，但若通以電流，則軟鐵心被磁化後使管內磁性大為增強，遠較單純螺線管或天然磁石的磁性大得多。工業用的強力電磁鐵可作為起重機，如圖 8-26 所示，在搬運鐵製物品時非常方便，也可用以區分磁性和非磁性的物件。



▲ 圖 8-25 通電流的螺線管內放入軟鐵心，可使管內磁場強度大幅增加。(a)空心的螺線管；(b)插有軟鐵心的螺線管。

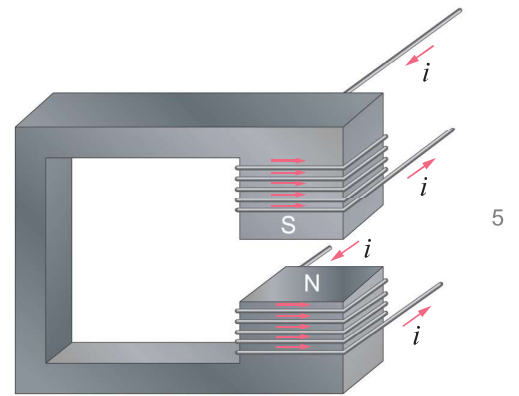


▲ 圖 8-26 工業用的電磁鐵起重機，可搬運鐵製物品，或用以區分磁性和非磁性物件。

5. 均勻磁場

一磁場中各位置的磁場量值和方向都相同者，稱為均勻磁場。電流通過的螺線管內部（圖 8-24）是常見的均勻磁場之一。另外，以鐵質材料做成類似圖 8-27 所示的形狀，並繞以線圈通過同方向的電流成為電磁鐵。在兩平面磁極之間（不靠近平面的邊緣）可視為均勻磁場。

均勻磁場在理論研究和實際應用都很重要，以下兩節的討論以均勻磁場為主。



▲ 圖 8-27 電磁鐵兩極之間的磁場近似均勻磁場。