

# 第一章 空間向量

## §1-1 空間概念

數學不管多抽象，總有一天可以用在外在的真實世界。

—Lobachevsky

前言：從平面圖形去思考空間，你需要承擔的就是被誤導或是自己誤解。

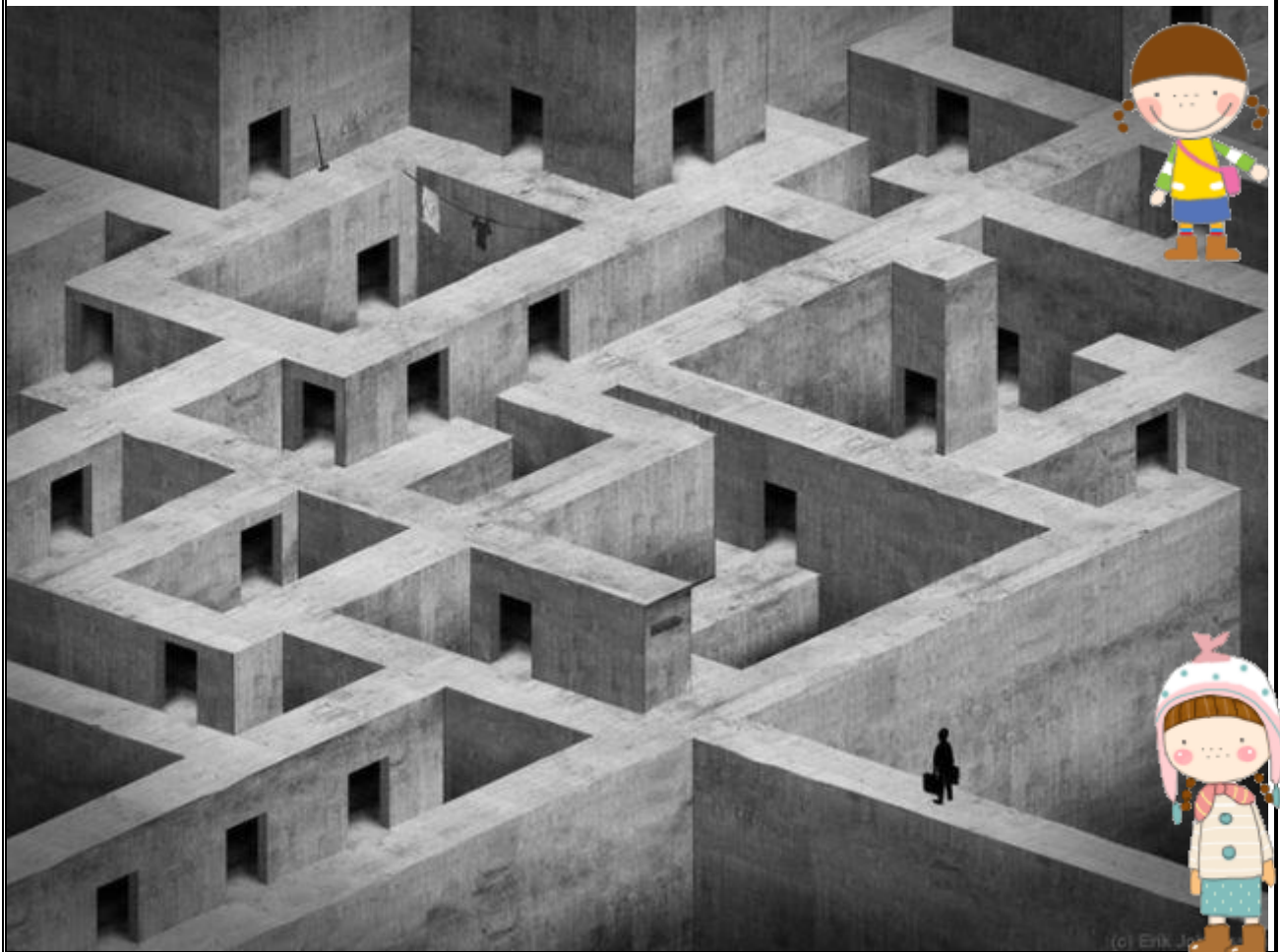
下圖中你似乎看得出他的立體感，但畢竟這是平面圖，

因此你的立體感是你的大腦

正在出賣你的視覺，並捏造你的思考，它只不過是在透過你曾經擁有的

認知來建立起那立體的圖形。

  
Start!



## 【空間與平面的區別】

(1)平面：只有「前後」與「左右」兩種方向的運動，其範圍必在平面上。

(2)空間：具有「前後」、「左右」與「上下」三種方向的運動，其範圍為空間。

而我們生活在三度空間裡，所謂三度空間是指以觀察者為基準，

像鷹揚長空，魚游湖裡，移動線有前後、左右、上下三種基本方位。

本章要研究的空間圖形是指由點、線、面所構成的圖形，在有了空間圖形的概念之後，本章要把平面上的向量推廣到空間上的向量，經由平面同樣的代數運算，可以求出空間圖形的幾何度量，包括

1. 點與點、直線、平面，直線與直線、平面，以及平面與平面的距離。
2. 向量與向量，平面與平面的夾角。
3. 藉由向量的外積來表示三角形與平行四邊形的面積。
4. 藉由行列式來表示平行六面體的體積。

相傳有一個故事：歐幾里得的一個學生問他，學習幾何之後將得到甚麼。歐幾里得對身邊的僕人說：給他三個錢幣，因為他想從學習中獲得利益。

歐氏幾何從最基本的定義、公理及公設，築構出一個宇宙，讓你在之中發掘、探索，找出各色各樣的定理，不論是抽象空間的美還是邏輯推演的美，也讓你在追求美的過程中，徹徹底地迷上數學。

在開始介紹之前我們先了解點、線、面一些基本性質，做為一些問題討論的起點，我們稱之為基本公設：



以這些公設為基礎，可以探討與解決空間圖形的問題。

(1)相異兩點可決定一直線；一直線至少含有相異的兩點。

(2)不共線的三點恰可決定一平面。

(3)如果一直線  $L$  上有相異兩點  $A, B$  均在平面  $E$  上，則  $L$  整條直線均在平面  $E$  上。

(4)如果兩相異平面有一個共同的點，則其所有共同的點構成一直線，稱為交線。

(5)過已知直線外一點，恰有一直線平行此直線。

(6)平行同一直線的兩直線互相平行。

由上面的公設，可以知道：

(a)一直線及不在此直線上的一點決定一平面。

試說明：“一直線及不在此直線上的一點決定一平面”的理由。

腦筋急轉彎一下

**Q：**為什麼孔子要周遊列國？

**A：**因為他要脫魯



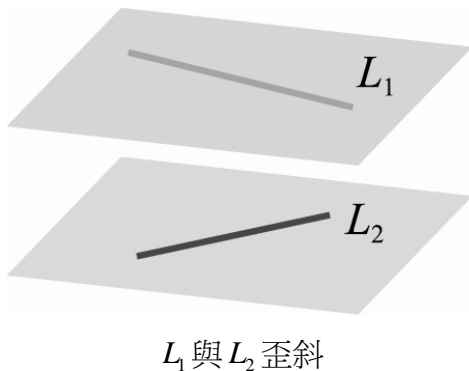
## 甲、空間中直線與直線的關係

\* 空間中兩直線的關係：

- (1) 互相平行 (共平面且沒有交點)，
- (2) 重合 (共平面 完全相交)，
- (3) 交於一點 (共平面 僅 交一點)，
- (4) 歪斜 (不共平面沒有交點)。

\* 而歪斜線是目前同學較不熟悉的關係，我們稍做解釋一下：

當空間中兩相異直線  $L_1$  與  $L_2$  既不相交也不平行時，稱此二直線  $L_1, L_2$  為歪斜線。



\* 根據上面的敘述，我們可以得到下面的結論：

**(b)**兩條相交於一點的直線決定一平面。

經由公設\_\_\_\_\_可知

**(c)**兩平行直線決定一平面。

經由公設\_\_\_\_\_可知

\* 因此我們根據前面(a)(b)(c)的討論，我們將它整理如下：

要在空間中決定一唯一平面可透過以下條件

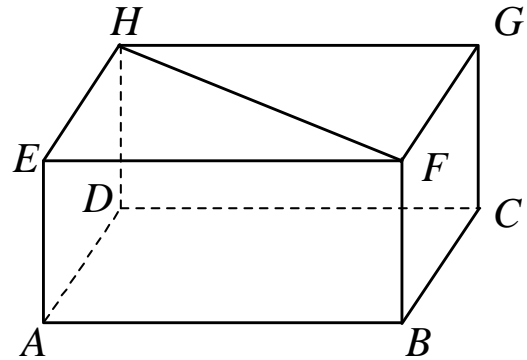
1. 不共線的三點。
2. 一直線及不在此直線上的一點。
3. 兩條相交於一點的直線。
4. 兩平行直線。



範例1.

右圖是一個長方體，下列哪些直線與直線  $AE$  歪斜？

- (1)直線  $AB$  (2)直線  $DH$  (3)直線  $FG$  (4)直線  $FH$

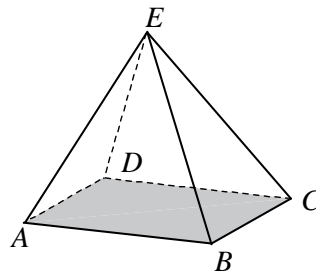


類題 1

右圖是一個立體圖形， $ABCD$  是一個正方形。

下列哪些直線與直線  $AD$  歪斜？

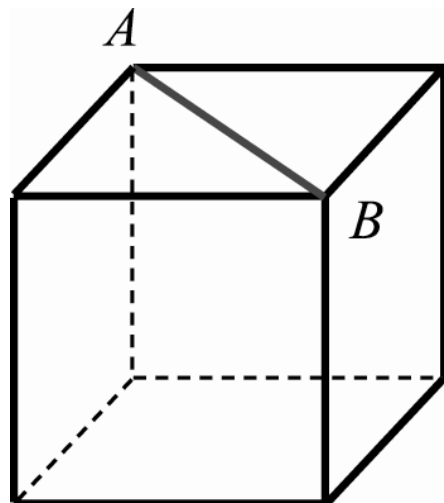
- (1)直線  $AB$  (2)直線  $BC$   
(3)直線  $BE$  (4)直線  $CE$



類題 2

右圖為一個正立方體，它共有 12 個邊。問：這 12 個邊中，有幾個邊所在的直線與直線  $AB$  歪斜？

- (1)2 (2)3 (3)4 (4)5 (5)6



範例2.

選出正確的選項：

- (1) 空間中，同時與一直線垂直的兩相異直線必互相平行。
- (2) 空間中，在同一平面上的兩相異直線必恰交於一點。
- (3) 空間中，無法共平面的兩相異直線必為歪斜線。
- (4) 空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

類題

選出正確的選項：

- (1) 空間中，兩平行直線必落在同一個平面上。
- (2) 空間中，若三直線兩兩互相平行，則此三直線必落在同一平面上。
- (3) 空間中，兩相交直線必落在同一個平面上。
- (4) 空間中，若三直線兩兩恰相交於一點，則此三直線必然落在同一平面上。

