7-2　電阻與歐姆定律

1. 電阻與歐姆定律

施加在物體上的電壓（即電位差）會驅動電荷移動而形成電流；將相同的電壓施加在不同的物體，若產生的電流愈小，代表該物體的導電能力愈差。我們將施加在物體兩端的電壓 V 和其產生電流 I 的比值稱為**電阻**（resistance），以 R 表示之，即

$$R=\frac{V}{I}$$

7-4 式

上式表示若物體的電阻 R 愈大，則由前述可知其導電能力愈差。電阻的 SI 單位為伏特/安培（即 V/A），稱為**歐姆**（ohm），以希臘字母 Ω 表示之，故 $1\Omega=1\ \mathrm{V/A}$。以 1 伏特的電位差施加在物體的兩端，若流經物體的電流為 1 安培，則此物體兩端之間的電阻為 1 歐姆。

1827 年，德國物理學家歐姆（Georg Simon Ohm，1789 - 1854）將其關於導體電阻的實驗結果發表在其著作《直流電路的數學研究》（*The Galvanic Circuit Investigated Mathematically*）。歐姆發現在溫度保持固定時，導體兩端的電壓 V 與其所產生的電流 I 成正比，即（7-4）式所定義之導體的電阻 R 為一與電流及電壓無關之常數（圖 7-7），之後把此現象稱為**歐姆定律**（Ohm's law），即

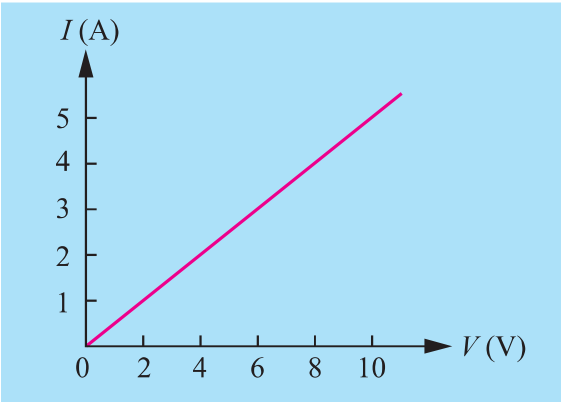
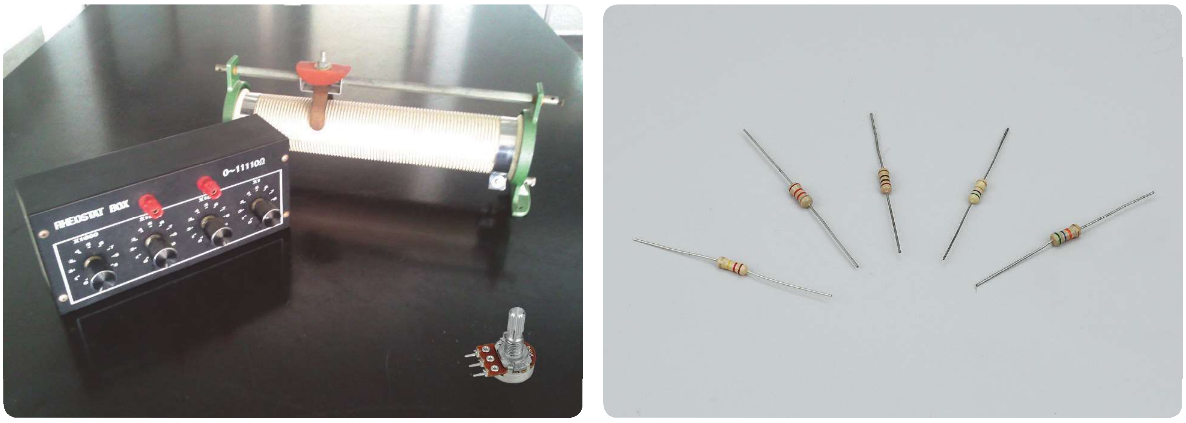


圖 7-7　導體符合歐姆定律時的電壓 V 與電流 I 關係曲線。

$$\frac{V}{I}=R，R\text{ 為定值}$$

7-5 式

如圖 7-8 所示，在電路中的可變電阻或是電阻值固定的柱狀電阻等元件都符合歐姆定律，若施加在電阻兩端的電壓提升為兩倍，則所產生的電流亦升高為兩倍。在電路圖中常以符號 表示電阻，而以符號 表示可變電阻。另外有許多電路元件並不符合歐姆定律，例如真空管、二極體、電晶體等。



(a) (b)

圖 7-8 (a)三種可變電阻與(b)柱狀電阻都符合歐姆定律。

2. 電阻率及電阻與溫度的關係

由實驗結果顯示，在溫度不變時，柱狀導體的電阻 R 會與導體的長度 L 成正比，與導體的截面積 A 成反比，即

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad \text{7-6 式}$$

式中 ρ 稱為電阻率（resistivity），SI 單位為 $\Omega \cdot \mathrm{m}$，其值僅和物質的種類以及溫度有關，而與物體的形狀或長度無關。在長度與截面積相同的條件下，若物體的電阻率愈大，則其電阻愈大。表 7-1 為常見物質在 20 ℃時的電阻率。

由表中可看出不同物質的電阻率相差極大。我們可根據電阻率的大小，將物質分成三組。電阻率最小的一組，其導電性較佳，稱為**導體**（conductor），例如金、銀、銅等金屬；而電阻率最大的一組，其導電性較差，稱為**絕緣體**（insulator），例如玻璃與石英；**半導體**（semiconductor）的導電性則介於兩者之間，例如鍺與矽。導體中銅的

電阻率甚小，常作成導線以接通各種電器，因為其電阻通常遠小於電器本身的電阻，故此時導線的電阻可以忽略不計。

表 7-1　常見物質在 20 ℃ 時的電阻率

種類	物質	電阻率（Ω・m）	種類	物質	電阻率（Ω・m）
導體	銀	1.59×10^{-8}	半導體	鍺	2.6×10^{-1}
	銅	1.69×10^{-8}		矽	6.4×10^{2}
	金	2.21×10^{-8}		砷化鎵	3.9×10^{6}
	鋁	2.71×10^{-8}	絕緣體	木材	$10^{8}\sim10^{14}$
	鎢	5.28×10^{-8}		玻璃	$10^{10}\sim10^{14}$
	鐵	9.61×10^{-8}		琥珀	5×10^{14}
	鎳鉻絲	1.5×10^{-6}		石英	7.5×10^{17}
	銦錫氧化物[註]（簡稱 ITO）	$\sim10^{-6}$			

不同物質的導電性隨溫度變化的關係亦可能不相同，例如當溫度升高時，金屬導體的電阻率隨溫度升高而增大。一般金屬導體的長度與截面積隨溫度而熱膨脹的變化遠小於電阻率的變化，因此當溫度變化時，柱狀導體的長度與截面積可視為定值，而由（7-6）式可知，導體的電阻會隨溫度升高而增大。半導體則相反，電阻率會隨溫度升高而變小，故當長度與截面積視為定值時，其電阻隨溫度升高而減小。

範例 7-3

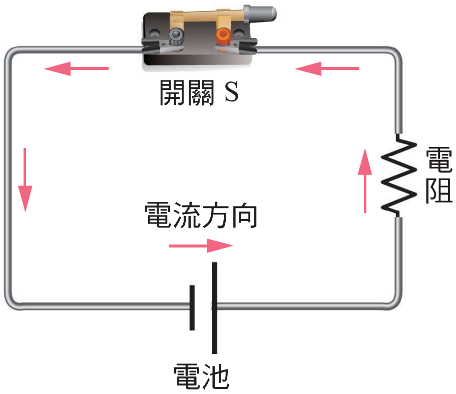
一銅製長導線，其截面積為 0.130 mm^2，長度為 1.50 m，在 20.0℃下，導線的電阻為何？

［解答］由表 7-1 知，20 ℃ 時銅的電阻率為 1.69×10^{-8} Ω・m，利用（7-6）式，可得銅線的電阻 R 為

$$R=(1.69\times10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})\frac{1.50\ \text{m}}{0.130\times10^{-6}\ \text{m}^2}=0.195\,\Omega$$

[註] 銦錫氧化物同時具備極佳的導電特性及高透光率，可製成透明的導電薄膜，覆蓋在玻璃上，可使玻璃表面導電。

3. 電流迴路



▲ 圖 7-9　簡單的電流迴路，導線的電阻忽略不計。

如圖 7-9 所示，將一個理想電池連接一個電阻，當開關 S 接通時，電流由電池的正極流出，經電阻回到電池的負極，再經由電池的內部流回到正極，保持連續的電流，形成一個簡單電流迴路，簡稱**電路**（electric circuit）。在電路中以符號 ─┤├─ 表示電池，長線代表正極，短線代表負極。

在一穩定的電路中，電量是守恆的，電路上任何一點必無電荷之積聚、產生或消滅，故如圖 7-9 所示之簡單迴路上各元件的電流均相同。在電路中，能量也是守恆的，在圖 7-9 中，移動的電荷從電池中所獲得的電能必等於在電阻所消耗的電能，所以電阻的電壓等於電池的端電壓。此外，電路在實際應用時，往往是將數個電阻**串聯**（in series）或是**並聯**（in parallel），再接上電池而形成穩定的電流。利用電阻串聯或並聯的等效電路，可以化簡成單一電池和電阻的簡單迴路，此想法討論如下。

1. 電阻的串聯

若電路中有 R_1、R_2 兩電阻的連結如圖 7-10 (a)所示，則稱為電阻的串聯。根據電量守恆，圖中流經各個電阻的電流 I 均相同。根據能量守恆，電池提供的端電壓等於 a 和 c 之間的電壓 V_{ac}。電壓 V_{ac} 等於 a、b 間電壓 V_{ab} 與 b、c 間電壓 V_{bc} 的和，即

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

若 a 到 c 之間的電阻以單一電阻 R 來表示（如圖 7-10 (b)），稱為等效電阻（equivalent resistance），由關係式 $V = IR$，則上式可改寫為

$$IR = IR_1 + IR_2$$

即

$$R = R_1 + R_2$$

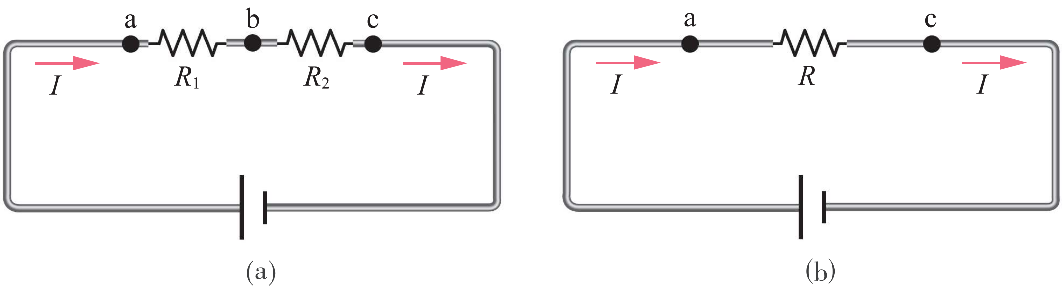


圖 7-10　(a) R_1 與 R_2 兩電阻串聯；(b)串聯電阻的等效電路，R 為等效電阻。

以上的結果，可以推廣至 R_1、R_2、…、R_N 等 N 個串聯的電阻，其等效電阻 R 為

$$R = R_1 + R_2 + \cdots\cdots + R_N = \sum_{j=1}^{N} R_j \qquad \text{7-7 式}$$

2. 電阻的並聯

若電路中有 R_1、R_2 兩電阻的連結如圖 7-11 (a)所示，則稱為電阻的並聯。根據能量守恆，圖中各個電阻的電壓 V 皆等於電池的端電壓。根據電量守恆，流經 a、b 兩點的電流 I 等於流經 R_1 的電流 I_1 與流經 R_2 的電流 I_2 的和，即

$$I = I_1 + I_2$$

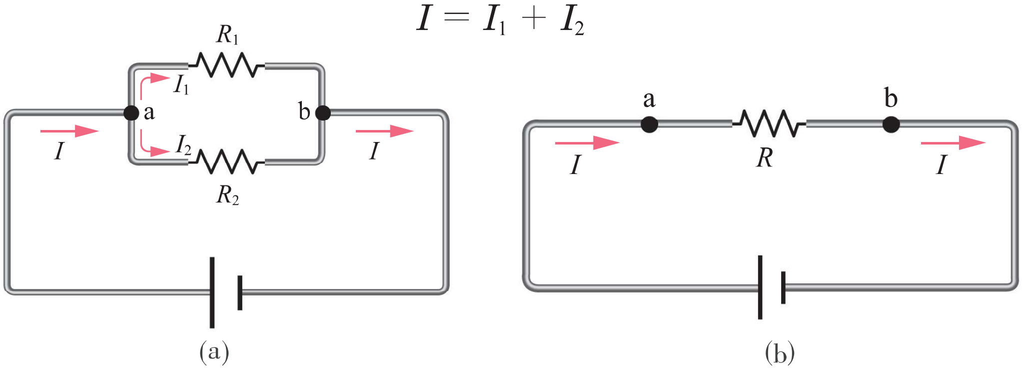


圖 7-11　(a) R_1 與 R_2 兩電阻並聯；(b)並聯電阻的等效電路，R 為等效電阻。

若以 R 表示由 a 到 b 的等效電阻（如圖 7-11 (b)），根據 $V = IR$，由上式可得 $\dfrac{V}{R} = \dfrac{V}{R_1} + \dfrac{V}{R_2}$，即

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

上式整理可得為 R 為$\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$。以上的結果，可以推廣至 R_1、R_2、⋯、R_N 等 N 個並聯的電阻，其等效電阻 R 與各電阻之間具有下列關係式。

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{R_N}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{R_j} \quad \text{7-8 式}$$

範例 7-4

如圖 7-12 所示，電路中 A、B、C 三個電阻分別為 12Ω、6.0Ω、8.0Ω，而電池電動勢為 36 V（理想電池），則

(1) 流經電池的電流為何？

(2) 流經 A、B 電阻的電流各為何？

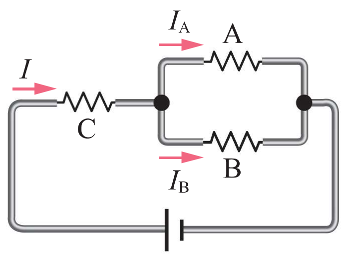


圖 7-12

[解答] (1) A、B 電阻為並聯，其等效電阻 R' 為

$$R'=\frac{R_AR_B}{R_A+R_B}=\frac{(12\,\Omega)(6.0\,\Omega)}{12\,\Omega+6.0\,\Omega}=4.0\,\Omega$$

再與電阻 C 串聯後，三個電阻的等效電阻 R'' 為

$$R''=4.0\,\Omega+8.0\,\Omega=12\,\Omega$$

因為理想電池的電動勢 $\mathscr{E}$ 等於等效電阻 R'' 的電位差，由關係式 $V=IR$ 可得此流經電池的電流 I 為

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R''}=\frac{36\text{ V}}{12\,\Omega}=3.0\text{ A}$$

(2) 根據電量守恆，流經電池的電流 I 等於流經電阻 A 的電流 I_A 與流經電阻 B 的電流 I_B 的和，即

$$I_A+I_B=3.0\text{ A}$$

A、B 兩電阻的電位差皆相同，由關係式 $V=IR$ 可知

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{R_B}{R_A}=\frac{6.0}{12}=\frac{1}{2}$$

則 $I_A=3.0\text{ A}\times\dfrac{1}{1+2}=1.0\text{ A}$，$I_B=3.0\text{ A}\times\dfrac{2}{1+2}=2.0\text{ A}$

範例 7-5

電池的電動勢為 $\mathscr{E}$，並為一理想電池，與四個電阻值皆為 R 的電阻連接如圖 7-13 所示，流經電池的電流為何？

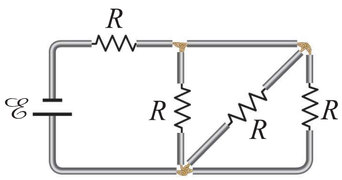


圖 7-13

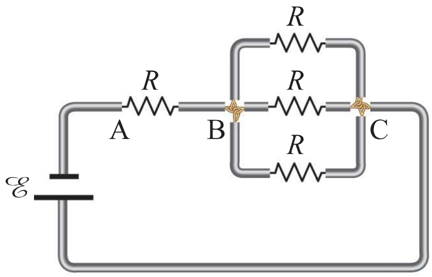


圖 7-14

[解答] 圖 7-13 電路相當於圖 7-14 所示的電路，設在 B、C 兩點間的等效電阻為 R_{BC}，由（7-8）式，則 R_{BC} 與 R 的關係為

$$\frac{1}{R_{BC}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}$$

可得 $R_{BC}=\dfrac{R}{3}$

設 A、C 兩點間的等效電阻為 R_{AC}，

由（7-7）式，則 $R_{AC}=R+\dfrac{R}{3}$

可得 $R_{AC}=\dfrac{4}{3}R$

因為 A、C 兩點間的電位差等於電池的電動勢，可得流經電池的電流為

$$I=\frac{\mathscr{E}}{\frac{4}{3}R}=\frac{3\mathscr{E}}{4R}$$

4. 電池的電動勢與端電壓

當電池接通外電路時，在電池的內部，電流由負極流向正極的過程中，因為電池內部也具有電阻，所以會消耗一部分能量，該電阻稱為內電阻。圖 7-15 所示為具有內電阻之實際電池的等效電路，在圖中，實際電池相當於由一電動勢 $\mathscr{E}$ 的理想電池串聯一內電阻 r 組成。

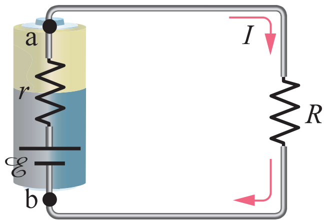


圖 7-15　圖中實際電池的等效電路，相當於一電動勢為 $\mathscr{E}$ 的理想電池串聯一內電阻 r。

若外電路的總電阻為 R，流經電池內部的電流為 I，根據能量守恆，電池的電動勢 $\mathscr{E}$ 等於內電阻 r 與外電路總電阻 R 的電壓總合，即 $\mathscr{E} = Ir + IR$，故電池的端電壓 V_{ab} 為

$$V_{\mathrm{ab}} = \mathscr{E} - Ir = IR \qquad \text{7-9 式}$$

電池的內電阻並非定值，它隨電池內部化學能的消耗而變大。因此當電池用久後，其內電阻增大而端電壓減小。

5. 安培計、伏特計與三用電表

測量電流的儀表稱為電流計或安培計，使用安培計時，必須與待測電路串聯，如圖 7-16 (a)所示，電路圖中常以 A 表示安培計。測量電壓的儀表則稱為電壓計或伏特計，使用伏特計時，須與待測電路並聯，如圖 7-16 (b)所示，電路圖中常以 V 表示伏特計。在實驗室中，我們可以使用三用電表來測量電壓、電流、電阻，所以一臺三用電表就可以提供伏特計或是安培計的功能了。

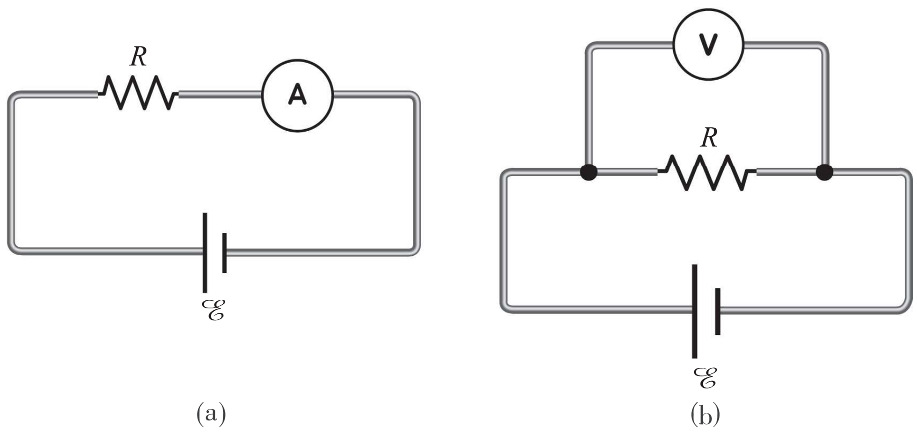


圖 7-16 (a)使用安培計時，必須和待測的電路串聯；(b)使用伏特計時，必須和待測的電路並聯。

想一想

測量電流時，為何安培計需與待測電路串聯？測量電壓時，為何伏特計需與待測電路並聯？

三用電表一般都具有交流電壓（ACV）與直流電壓（DCV）的測量、交流電流（ACA）與直流電流（DCA）的測量，以及電阻測量等基本功能。圖 7-17 所示為兩種在市面上常見的機型，即數位和類比兩種，其探針有紅色與黑色兩根供測量使用。類比型三用電表，其原理是當電流通過線圈時，會使線圈在磁場中偏轉，利用附著在線圈上的指針所偏轉的角度，以指示電流的大小，我們在下一章中將有詳細的說明。

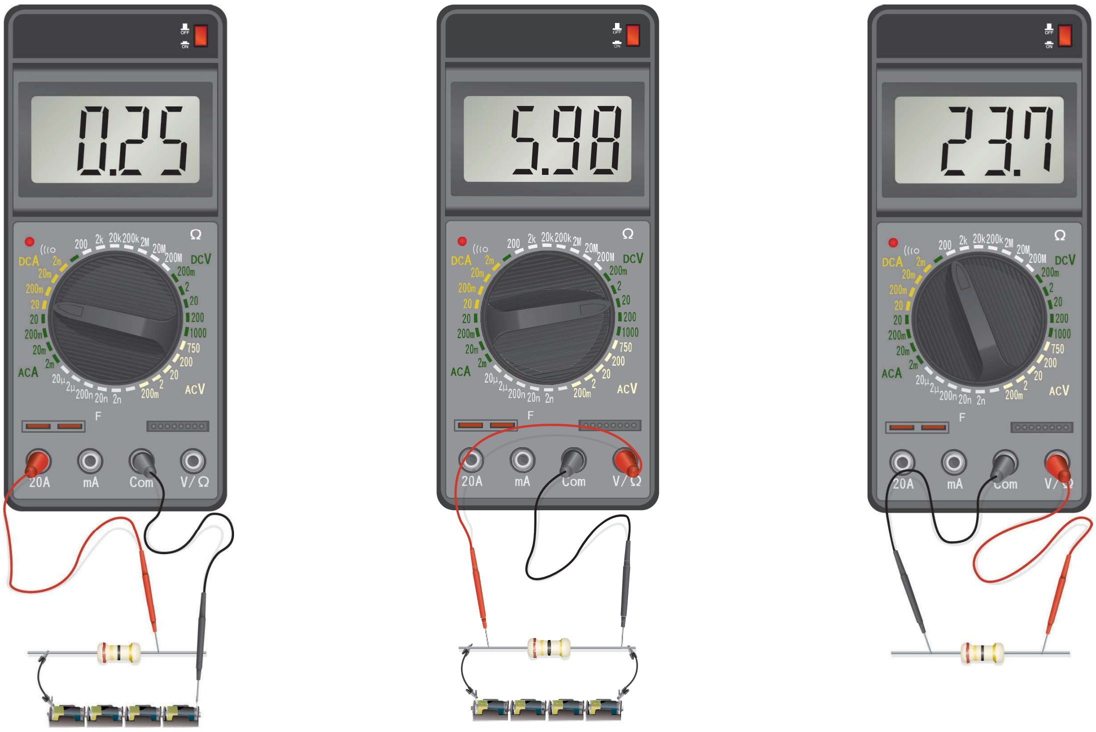
(a)　　(b)

▲ 圖 7-17　(a)數位型的三用電表；(b)類比（指針）型的三用電表。

如圖 7-18 (a)所示，在測量電流時，類似於安培計的使用方法，需將旋轉開關轉至 DCA 區域，將黑色探針插入“COM”插座，紅色探針插入“mA”插座（待測電流大於 200 mA 則插入 20 A 插座），兩根探針與電路待測處作串聯。

如圖 7-18 (b)所示，在測量電壓時，類似於伏特計的使用方法，需將旋轉開關轉至 DCV 區域，將黑色探針插入“COM”插座，紅色探針插入 "V/Ω" 插座，兩根探針與電路上待測的兩端作並聯。

三用電表在測量電阻時，必須將待測物自線路中取下，單獨測量其電阻值，切不可在接通的線路上直接測量。如圖 7-18 (c)所示，將旋轉開關轉至 Ω 區域，將黑色探針插入“COM”插座，紅色探針插入“V / Ω”插座，而將三用電表的兩根探針分別與待測電阻的兩端接觸。



(a) (b) (c)

圖 7-18　使用三用電表：(a)測量電流；(b)測量電壓；(c)測量電阻。

做一做

使用三用電表測量電池的電壓，並讀取其標示值做比較，和同學討論觀察所得結果。

想一想

如圖 7-19 所示，將小夜燈插頭插在插座卻不發光，可能燈泡本身的鎢絲斷掉，可能插座故障無法供電，也可能是燈座與插頭間形成斷路，或是插頭與插座接觸不良。請設計方法利用三用電表檢查所有可能原因（原因可能不只一種）。

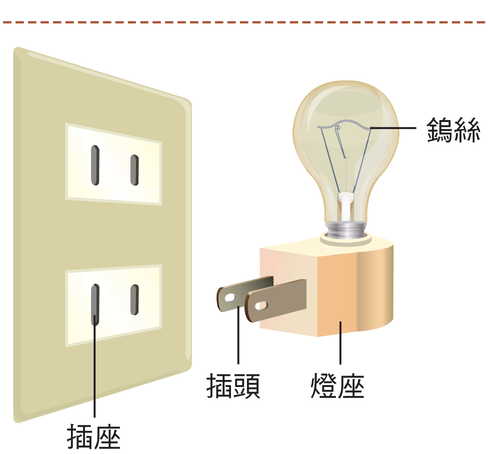


圖 7-19

6. 惠司同電橋

惠司同電橋是一種常用來測量未知電阻的電路，其線路連接如圖 7-20 所示，圖中 R_1、R_2、R_3 與 R_4 分別為四個電阻，G 為檢流計。當開關 S 接通時，若檢流計的讀數為零，則 A 和 B 兩點之間的電位差為零。此時流經 R_1 與 R_2 的電流也相同，以 I_1 表示之；另一方面，流經 R_3 與 R_4 的電流也應相同，以 I_2 表示之。由於 A、B 兩點的電位相等，故電壓 V_{AM} 等於電壓 V_{BM}，以及電壓 V_{AN} 等於電壓 V_{BN}，由關係式 $V = IR$，分別可得

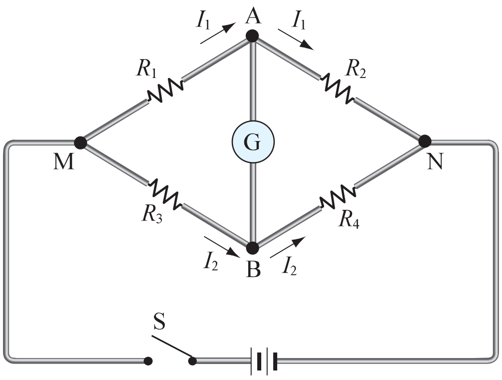


圖 7-20　以惠司同電橋測量電阻。

$$I_1 R_1 = I_2 R_3 \qquad \text{7-10 式}$$

$$I_1 R_2 = I_2 R_4 \qquad \text{7-11 式}$$

整理（7-10）式與（7-11）式，可得

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \qquad \text{7-12 式}$$

若 R_2 為待測電阻，當其他三個電阻 R_1、R_3 和 R_4 為已知時，則可利用（7-12）式求得電阻值 R_2。

範例 7-6

分別將 R_1、R_2、R_3 及 R_4 等四個電阻與電動勢 $\mathscr{E} = 10\ \text{V}$ 的理想電池電池連接如圖 7-21，試問：

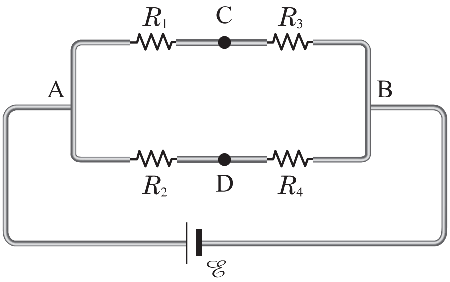


圖 7-21

(1) 設 $R_1 = 40\,\Omega$，$R_2 = 480\,\Omega$，$R_3 = 160\,\Omega$，若 C 與 D 兩點的電位差為零，則電阻 R_4 為何？

(2) 承題 (1)，當 R_1、R_2 與 R_3 維持不變，電阻 $R_4 = 160\,\Omega$，則 C 與 D 兩點的電位差 $V_C - V_D$ 為何？

[解答] (1) 若 C 與 D 兩點的電位差為零，根據惠司同電橋原理，則 $R_1R_4 = R_2R_3$，得電阻 R_4 為

$$R_4 = \frac{R_2R_3}{R_1} = \frac{(480\,\Omega)(160\,\Omega)}{(40\,\Omega)} = 1920\,\Omega$$

(2) 由 $V = IR$，流經 ACB 的電流 I_1 與流經 ADB 的電流 I_2 分別為

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_3} = \frac{10\ \text{V}}{40\,\Omega + 160\,\Omega} = \frac{1}{20}\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + R_4} = \frac{10\ \text{V}}{480\,\Omega + 160\,\Omega} = \frac{1}{64}\ \text{A}$$

C 與 B 的電位差及 D 與 B 的電位差分別為

$$V_C - V_B = I_1R_3 = \left(\frac{1}{20}\ \text{A}\right)(160\,\Omega) = 8\ \text{V} \quad ①$$

$$V_D - V_B = I_2R_4 = \left(\frac{1}{64}\ \text{A}\right)(160\,\Omega) = 2.5\ \text{V} \quad ②$$

根據①式及②式，C 與 D 的電位差為

$$V_C - V_D = (8\ \text{V} + V_B) - (2.5\ \text{V} + V_B) = 5.5\ \text{V}$$

當惠司同電橋上的四個電阻彼此間有適當的比例關係，方能使 C、D 兩點的輸出電壓為零；若是電橋上的某個電阻（例如 R_4）因為形變而產生電阻變化，則 C、D 兩點的電壓不為零，利用 C、D 兩點的電壓輸出可推得電阻的變化量，此性質被應用在電子感測器的設計。