5-1 等速圓周運動 Physics

遊樂場裡的摩天輪轉動時，掛在摩天輪上的座艙隨之作圓周運動（如章首圖）。若物體沿著圓周轉動時，維持固定速率，則稱為**等速圓周運動**（uniform circular motion）。

1 轉動的快慢

一質點作等速圓周運動，轉動一圈所經歷的時間，稱為**週期**（period），通常以符號 T 表示。在國際單位制中，週期的單位為秒（s）。質點在每單位時間所轉過的圈數，稱為**頻率**（frequency），通常以符號 f 表示之。在國際單位制中，頻率的單位為赫茲（Hz），即 $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$。週期 T 和頻率 f 之間的關係為

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{5-1 式}$$

上式表示，若**質點轉動的週期較短，則頻率較高，質點轉動也較快**。因此質點作等速圓周運動的快慢，可以由質點轉動的頻率或週期來描述。

另一用於描述轉動快慢的物理量，稱為**角速度**（angular velocity），**定義為每單位時間質點對圓心所轉的角度，以符號 ω 表示**。在國際單位制中，角度以弧度為單位，角速度單位為弧度/秒（rad/s）[註]。若在等速圓周運動的情形下，則 ω 為一定值，即 $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} =$ 定值，$\Delta\theta$ 為在時間 Δt 內所轉的角度。

小知識　轉速

生活中也常用轉速多寡來代表轉動的快慢，例如硬碟中的馬達每分鐘轉動 5400 圈，則轉速記為 5400 rpm（revolutions per minute）。

註　請參閱延伸閱讀 P.182。

質點對圓心轉動一周所繞過的角度為 2π 弧度，所經歷的時間為 T，可得角速度 ω 為

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

5-2 式

（5-2）式表示，角速度 ω 和頻率 f 的差異僅在於前者是以每秒轉過的角度來表示質點轉動的快慢程度，而後者則是以每秒轉過的圈數來表示質點轉動的快慢程度。

考慮一質點在半徑為 R 的圓周上以等速率 v 運動，其繞圓心轉動一周的路徑長為 $2\pi R$，所經歷的時間為 T，可得速率 v 如下

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

5-3 式

由（5-2）與（5-3）兩式消去 T，可得

$$v = \omega R$$

5-4 式

綜合以上的討論，在等速圓周運動中，我們可以用角速度 ω 或頻率 f 等物理量來描述質點轉動的快慢。

想一想

取杯口與杯底半徑不同的杯子，杯身平放在桌面上，推動杯身使其滾動（圖 5-2），為什麼杯子無法做直線運動？

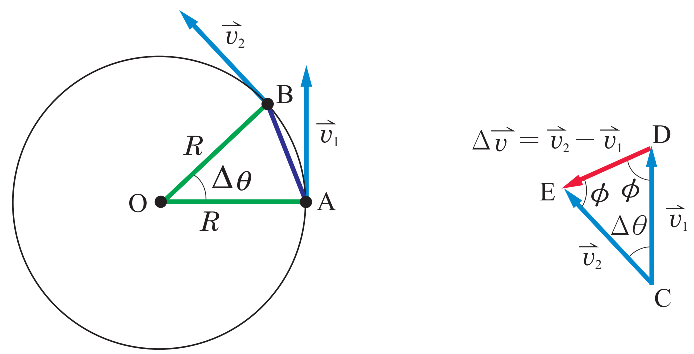
圖 5-2

2 向心加速度

質點作等速圓周運動時，其速度量值雖然保持不變，但其**速度的方向始終沿著圓周的切線方向**。因為速度方向隨時間改變，因此等速圓周運動實際上為一變速度運動。既然質點的速度隨時間而變動，則質點在運動過程中具有加速度。

如圖 5-3 所示，若質點以等速率 v 由 A 點運動至 B 點，對圓心轉過的角度為 $\Delta\theta$，所經歷的時間為 Δt，其速度則由 $\vec{v}_1$ 變化為 $\vec{v}_2$。將圖 5-3 (a)中的 $\vec{v}_2$ 由 B 點平移至 A 點，利用向量的減法，可求得速度變化量 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$，如圖 5-3 (b)所示。根據運動學，若時間 Δt 極短時，則可求得瞬時加速度 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$。

由於 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$，所以圖 5-3 (b)中的三角形 CDE 為等腰三角形，其底角 $\phi = 90^\circ - \dfrac{\Delta\theta}{2}$。若 Δt 趨近於零，則 $\Delta\theta$ 趨近於零，ϕ 趨近於 90°，則 $\Delta\vec{v}$ 趨近垂直於 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$。由於 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 是沿著圓周的切線方向，所以 $\Delta\vec{v}$ 方向是沿著半徑指向圓心。因為 $\Delta\vec{v}$ 與 $\vec{a}$ 的方向相同，所以**質點作等速圓周運動時，其加速度的方向恆指向圓心，稱為向心加速度**（centripetal acceleration）。



(a)　　　　　　　　(b)

▲ 圖 5-3　(a) 質點以等速率 v 由 A 點移動至 B 點，對圓心轉過 $\Delta\theta$，速度由 $\vec{v}_1$ 變化為 $\vec{v}_2$；
(b) 速度變化量 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$。

若 $\Delta\theta$ 趨近於零，則圖 5-3 (a)中的線 $\overline{AB}$ 段趨近於弧長 $\overset{\frown}{AB}$。由於圖 5-3 (a)中的三角形 OAB 與圖 5-3 (b)中的三角形 CDE 是相似三角形，所以

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_1|} = \frac{\overline{AB}}{R} \approx \frac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \frac{R\Delta\theta}{R} = \Delta\theta$$

所以向心加速度的量值 a 為

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}\,|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta\,|\vec{v}_1|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}v \tag{5-5 式}$$

但由於 $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 的意義是質點於每單位時間中所轉的角度，而這即是該瞬時角速度 ω 的定義，因此（5-5）式成為

$$a=\omega v \tag{5-6 式}$$

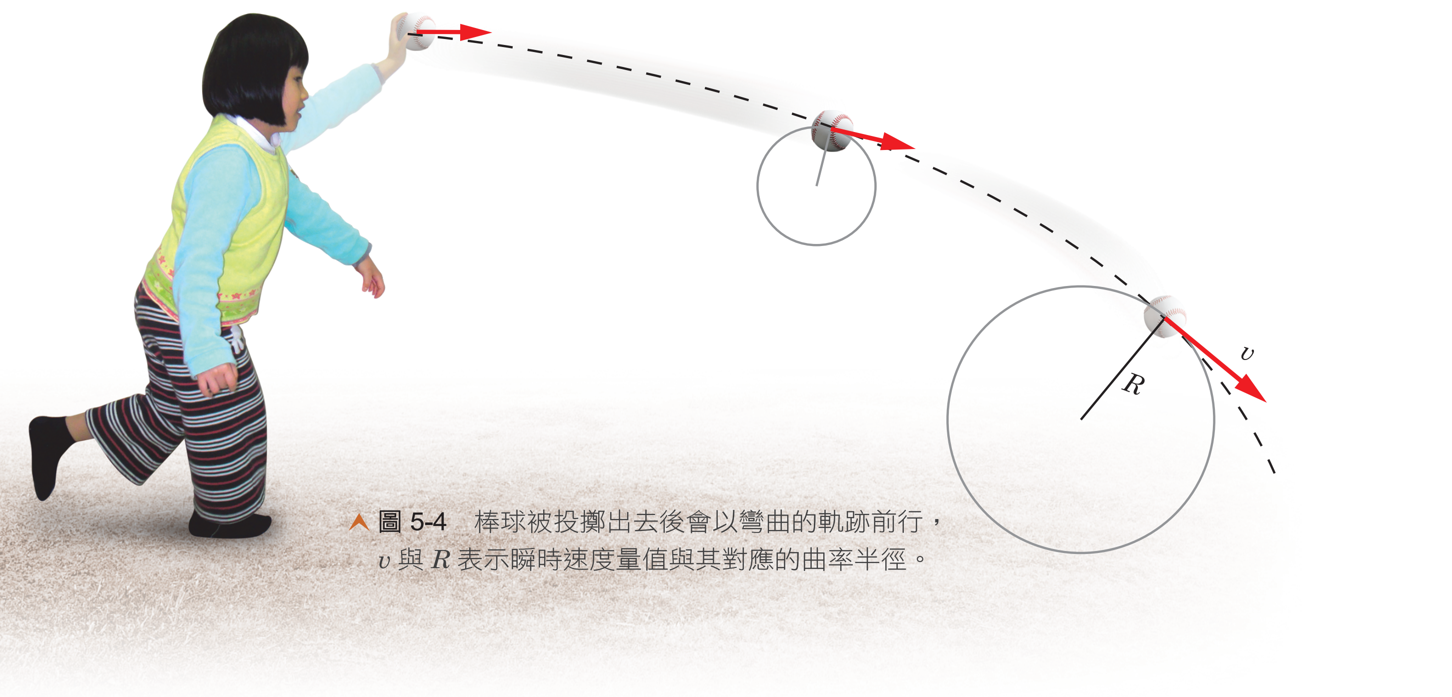
我們還可以透過（5-3）式或（5-4）式，更進一步將（5-6）式改寫成以下兩種經常用到的形式

$$a=\omega^2 R=\frac{v^2}{R} \tag{5-7 式}$$

若質點作等速圓周運動的週期為 T，則亦可將向心加速度表示成

$$a=\omega^2 R=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

若質點作圓周運動的速率非定值，或是質點的運動軌跡為任意曲線，而我們能測量或計算出來軌跡的某一小段彎曲的半徑 R，如圖 5-4，則（5-7）式對該質點仍然適用。



▲ 圖 5-4　棒球被投擲出去後會以彎曲的軌跡前行，v 與 R 表示瞬時速度量值與其對應的曲率半徑。

綜合以上的討論，一質點作等速圓周運動時，在不同位置的速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$ 的方向如圖 5-5 所示，速度 $\vec{v}$ 皆沿著圓周的切線方向，加速度 $\vec{a}$ 的方向皆沿著半徑指向圓心 O。在這裡要特別注意的是，**向心加速度只改變速度的方向，而不改變速度的量值**。

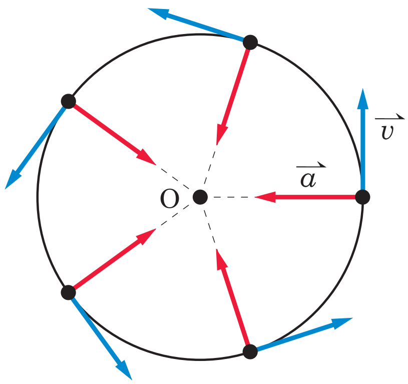


圖 5-5　質點以等速率作圓周運動，在不同位置時的速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$ 相互垂直，且加速度方向恆指向圓心。

範例 5-1

地球在赤道面上的半徑約為 6380 公里，自轉一周的時間為一個恆星日，等於 86164 秒。如圖 5-6 所示，在赤道上的物體皆繞著地球自轉軸作等速圓周運動，則其角速度、速度和向心加速度量值各為何？（取 3 位有效數字）

解答

由（5-2）式可得其角速度為

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2\pi \text{ rad}}{86164 \text{ s}} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

由（5-4）式可得其速度的量值為

$$v = \omega R$$

$$= (7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s})(6.38 \times 10^{6} \text{ m}) = 4.65 \times 10^{2} \text{ m/s}$$

速度方向指向東方。由（5-7）式可得向心加速度的量值為

$$a = \omega^2 R = (7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s})^2 (6.38 \times 10^{6} \text{ m})$$

$$= 3.39 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

加速度的方向指向地球的中心。

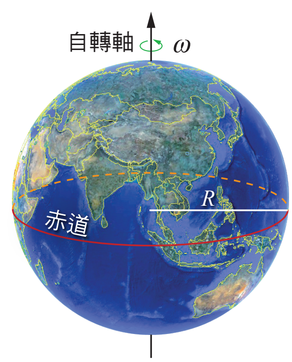


圖 5-6

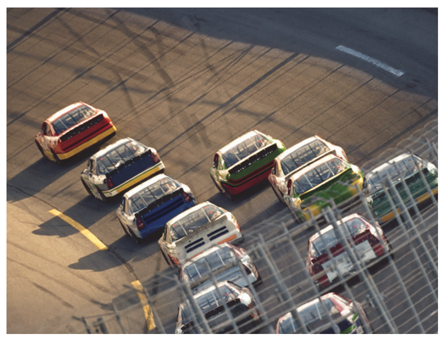
3 向心力與等速圓周運動的實例

由於作**等速圓周運動之質點的加速度方向恆指向圓心**，故從牛頓第二運動定律知道**作用在質點的外力總和方向也就恆指向圓心，此力稱為向心力**（centripetal force）。根據（5-7）式，若質點之質量為 m，則其向心力的量值 F 為

$$F = ma = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{5-8 式}$$

向心力並不是一種新的作用力，向心力可以是單獨的力，例如張力或是重力，向心力也可以是多個作用力所產生的合力。如圖 5-7 所示，**例如汽車在水平路面轉彎時，可以用摩擦力作為向心力**，若是汽車轉彎速率過大，摩擦力不足以提供汽車轉彎所需之向心力，則會在轉彎處鋪設成傾斜的路面，讓路面對汽車作用的正向力之水平分力來彌補向心力的不足（圖 5-8）。

▲ 圖 5-7　汽車在水平路面遇到轉彎時，用摩擦力作為向心力。



▲ 圖 5-8　在公路的轉彎處鋪設成傾斜的路面，以利汽車改變速度的方向。

範例 5-2

質量為 m 的汽車，分別經過凹陷路面與凸起路面，兩路面皆可視為半徑 R 的一段圓弧，如圖 5-9 所示，若重力加速度為 g，則

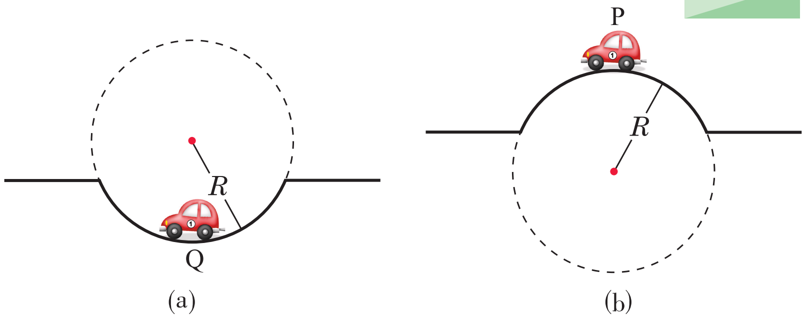


圖 5-9

(1) 行駛至凹陷路面最低點 Q 處的速率為 v，路面對汽車的正向力為何？

(2) 行駛至凸起路面最高點 P 處的速率為 v，路面對汽車的正向力為何？

(3) 承題(2)，汽車在最高點 P 處，欲保持貼住路面行駛，則速率 v 所允許的最大值為何？

解答

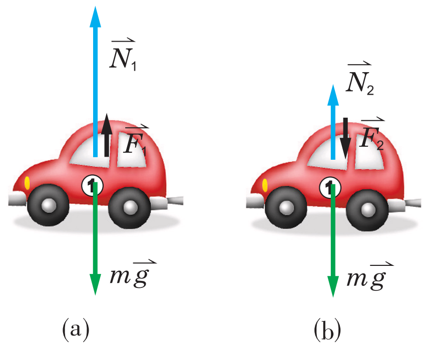


圖 5-10

(1) 汽車在鉛直方向受到方向朝上的正向力 $\vec{N}_1$ 與方向朝下的重力 $m\vec{g}$，如圖 5-10 (a) 所示。在 Q 點，所受合力 $\vec{F}_1$ 為方向朝上的向心力，則向心力 $F_1 = N_1 - mg$。已知速率為 v，圓周半徑為 R，由（5-8）式得知

$$N_1 - mg = m\frac{v^2}{R}\text{，即 } N_1 = mg + m\frac{v^2}{R}$$

(2) 汽車在鉛直方向受到方向朝上的正向力 $\vec{N}_2$ 與方向朝下的重力 $m\vec{g}$，如圖 5-10 (b) 所示。在 P 點，所受合力 $\vec{F}_2$ 為方向朝下的向心力，則向心力 $F_2 = mg - N_2$。已知速率為 v，圓周半徑為 R，

由（5-8）式得知 $mg - N_2 = m\dfrac{v^2}{R}$，即 $N_2 = mg - m\dfrac{v^2}{R}$

(3) 若保持貼住路面，則 $N_2 \geq 0$，將題(2)求得之答案代入不等式，可以得知

$$mg - m\frac{v^2}{R} \geq 0\text{，即 } v \leq \sqrt{gR}$$

所以汽車行駛的速率不能超過 $\sqrt{gR}$，否則就會發生汽車飛出路面的危險事故了。

範例 5-3

質量為 m 的汽車，經過凸起路面，路面視為半徑 R 的一段圓弧，O 為圓心，如圖 5-11 所示。若汽車的速率為 v，而重力加速度為 g，在某時刻，當汽車與 O 點的連線與鉛直線夾角為 θ 時，則路面對汽車的正向力量值為何？

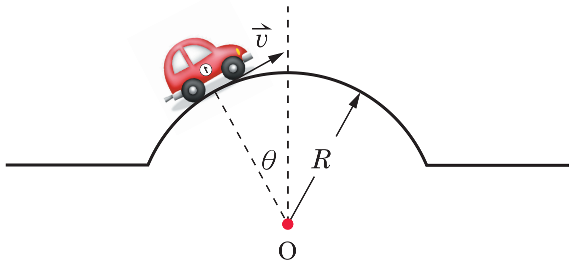


圖 5-11

解答

汽車在路面受到量值分別為 N 與 mg 的正向力和重力，重力的方向朝下，正向力則與路面垂直且指離圓心 O，如圖 5-12 所示。

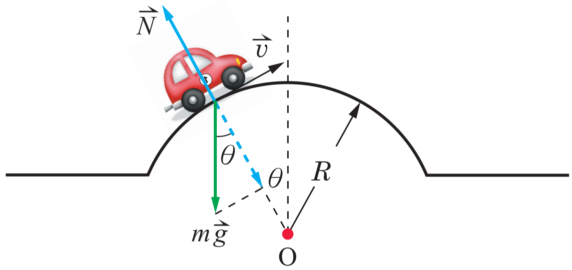


圖 5-12

重力可分解為與路面垂直及平行兩分量，其中垂直路面的分量為 $mg\cos\theta$，方向指向圓心。汽車在與路面垂直方向所受合力即為向心力，故向心力量值為

$$mg\cos\theta - N$$

已知汽車的速率為 v，圓周半徑為 R，由（5-8）式，可得

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$$

故正向力

$$N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

範例 5-4

路面溼滑時，摩擦力不足以提供汽車轉彎所需之向心力，故常將彎曲路面築成外側較高之斜面（如圖 5-13）。考慮一曲率半徑為 R 之彎道，路面傾斜角為 θ。若不計路面摩擦力，欲使質量 m 之汽車行經此彎道而不向外滑去或向內滑下的趨勢，車速應保持多少？

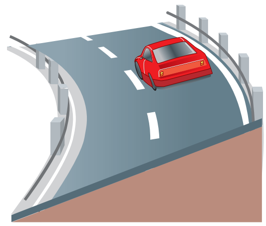


圖 5-13

解答

如圖 5-14 所示，汽車共受二力：一為汽車之重量 $m\vec{g}$，方向鉛直向下；另一為路面所提供之正向力 $\vec{N}$，其方向垂直路面向上。

此二力之合力 $mg\tan\theta$ 提供其作半徑 R 的圓周運動之向心力。設汽車速率為 v，由（5-8）式可知

$$mg\tan\theta = m\frac{v^2}{R}$$

得 $v = \sqrt{gR\tan\theta}$

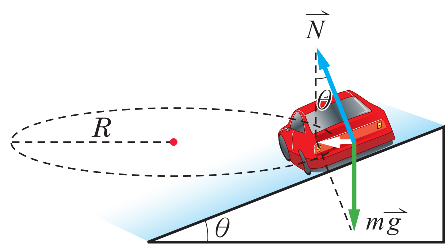


圖 5-14

想一想

在範例 5-4 中，若路面對汽車有摩擦力的作用，當車速小於 $\sqrt{gR\tan\theta}$，則摩擦力的方向為何？

在分析範例 5-3 與範例 5-4 時，因為作圓周運動的物體具有向心加速度，所以將物體受到的各個作用力分解成平行及垂直於該瞬間圓周半徑方向的分力。但是當物體沿斜面運動時，因為物體僅在沿斜面方向具有加速度，所以將物體受到的各個作用力分解成平行及垂直於斜面方向的分力，由平行斜面方向的合力可以求得加速度（圖 5-15）。

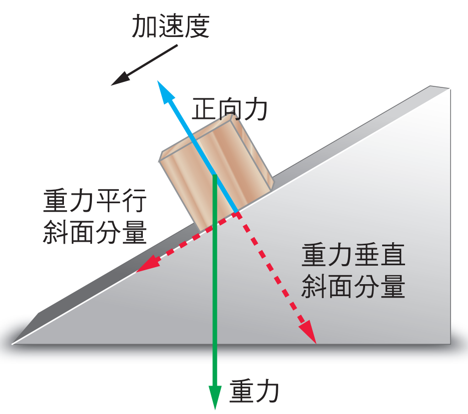
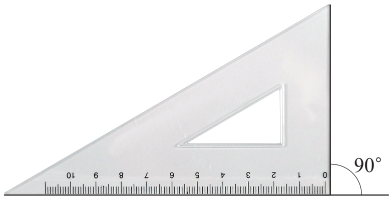


圖 5-15　物體沿斜面下滑

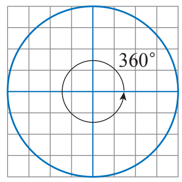
延伸閱讀 In-depth Readings

■ 角度的表示

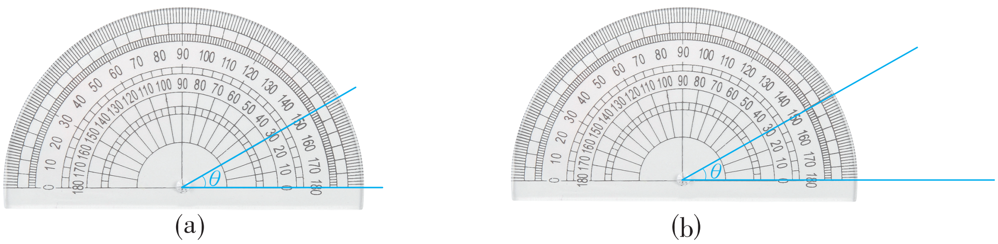
如果一平面上的兩直線互相垂直，通常我們說這兩線的夾角為 90 度（90°），為一直角，如圖 5-16 所示。整個圓的圓心角為四個直角，即 360°，如圖 5-17 所示。一般，兩線的夾角常以符號 θ 表示。兩線的夾角有一很重要的性質，即角的度量與角兩邊線的長度無關，如圖 5-18 中的(a)和(b)的角度 θ 相等。



▲ 圖 5-16　互相垂直的兩線夾角為 90°。

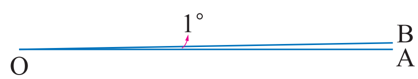


▲ 圖 5-17　整個圓的圓心角為 360°。



▲ 圖 5-18　角的度量與角兩邊線的長度無關，(a)和(b)兩圖中的角度 θ 相同。

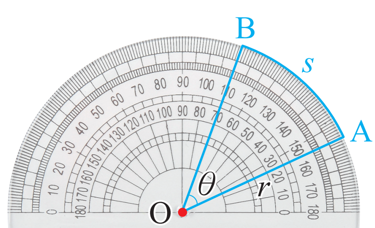
在圖 5-19 中，$\angle AOB = 1^\circ$，看起來是很小的角度。若 O 為地球中心，A 和 B 為赤道上的兩個點，則 A 和 B 兩點相距約 $\dfrac{40000\text{ 公里}}{360} = 110$ 公里。以日常生活中而言，這仍然是相當大的距離。所以將每一度分成 60 等分（ㄈㄣˋ），每一等分稱為分（ㄈㄣ）。每一分再分成 60 等分，每一等分稱為 1 秒。所以圖 5-19 中，如果 $\angle AOB$ 為 1 秒時，則 A 和 B 兩點相距大約 30 公尺。



▲ 圖 5-19　$\angle AOB = 1^\circ$

角度的度量也常用另一種方法來表示，在圖 5-20 中，s 為半徑 r 的一段圓弧長度，圓心角 $\angle AOB$（以 θ 表示）與所對的弧長 s 成正比。若圖中的 θ 不變，而半徑 r 愈大，則弧長 s 也愈大。所以我們可以用弧長 s 與半徑 r 的比值來度量角度 θ，即

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(1)式}$$



▲ 圖 5-20　角度可以用弧長與半徑的比值來表示。

由(1)式得到的角度 θ 單位為弧度（又稱弳度），符號為 rad。需注意的是由於 θ 為兩長度的比值，為無因次數，故角度單位的符號 rad 可以略去。

由(1)式可知，若弧長 s 與半徑 r 相等，則弧長 s 所對的圓心角 θ 為 1 弧度，如圖 5-21 所示。

度分秒表示的角度與弧度表示的角度，兩者之間的關係可以如下推得：

半徑為 r 的圓，其周長為 $2\pi r$（π 為圓周率，即 3.14159 …），整個圓所對的圓心角為 $\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$ 弧度。在度分秒表示法中，整個圓的圓心角為 360°，即 2π 弧度等於 360°。因此，1 弧度 $=\dfrac{360^\circ}{2\pi}=57.3^\circ$。反過來，$1^\circ$ 約為 0.0175 弧度。

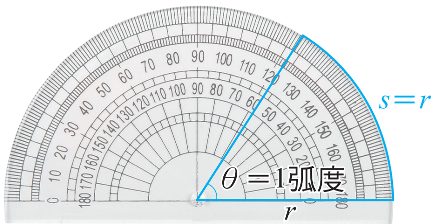


圖 5-21　若弧長 s 與半徑 r 相等，則圖中的 θ 為 1 弧度。

下表所列為常見特殊角度以這兩種方法表示時，其間的換算關係，由量角器測量各特殊角度的大小關係如圖 5-22 所示。

弧度	π	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{180}$
度	180	60	45	30	1

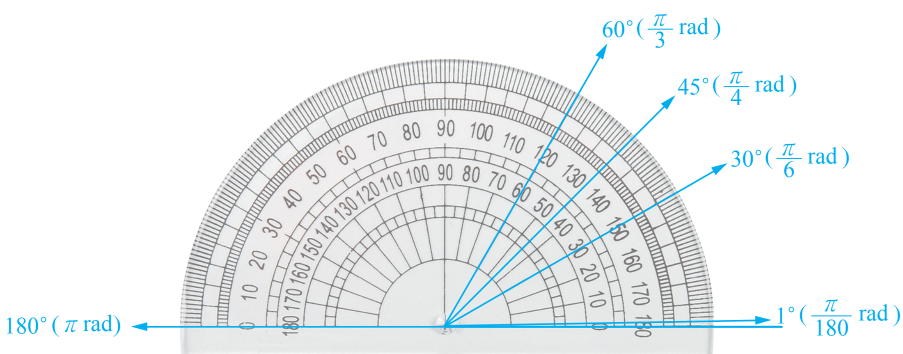


圖 5-22　量角器測量常見的特殊角度