【上架課堂講義內容】

課堂影片片名：【吳銘數學】58-高二數學(上) |向量—克拉瑪公式推導與經典題型 | 20160113 二勤

發佈日期：2016 年 1 月 14 日

授課教師：吳銘祥老師

授課主題：高二數學(上) 3-4 向量—克拉瑪公式推導與經典題型

課堂時間：20160113 二勤

課堂講義：

影片長度：46min

吳銘祥老師數學教室：http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/blog/?cat=20

講義內容節錄：

3-4 面積與二階行列式

乙、克拉瑪公式、兩直線幾何關係的代數判定

＊第一冊，我們利用配方法解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，推導出它的公式解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

此後所有一元二次方程式都可以利用這個公式而得到解．現在，我們試著利用加減消去法推導二元一次聯立方程式的公式解：

ex)聯立方程式(數字版)

$$\begin{cases}3x+7y=8\\5x+6y=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\times6x+7\times6y=8\times6\\5\times7x+6\times7y=9\times7\end{cases}$$

$$(3\times6-5\times7)x=8\times6-9\times7$$

$$x=\frac{8\times6-9\times7}{3\times6-5\times7}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8&7\\9&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&7\\5&6\end{vmatrix}}$$

聯立方程式(代數版)

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

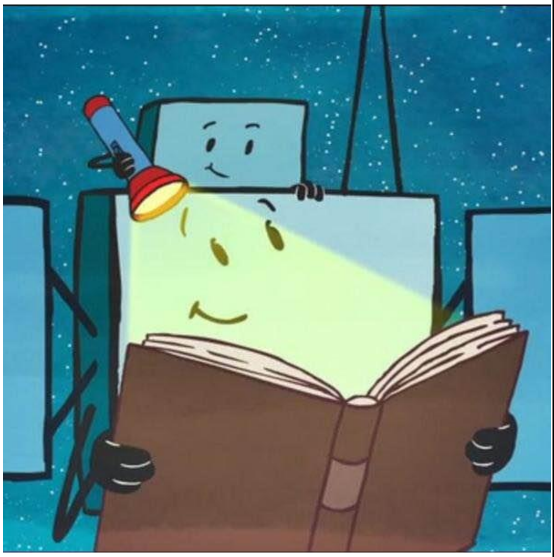
$$\begin{cases}a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2\\a_2b_1x+b_2b_1y=c_2b_1\end{cases}$$

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

<u>克拉瑪</u>公式

設 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.



當 $\Delta\neq 0$ 時，二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

恰有一組解，且其解為

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}，\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

＊以幾何的觀點，討論聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解

可分成三種情況並與克拉馬做比較

範例6.

利用克拉瑪公式，解二元一次聯立方程式$\begin{cases} 9x+10y=11, \\ 11x+12y=13 \end{cases}$。

Ans: (2,-4)

$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = 108-110 = -2$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 12 \end{vmatrix} = 132-130 = 2$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 117-121 = -4$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$

類題 1

利用克拉瑪公式，解二元一次聯立方程式$\begin{cases} 35x+36y=37, \\ 37x+38y=39 \end{cases}$。

範例7.

試就實數 k 的值，討論聯立方程式 $\begin{cases} kx+3y=k+3 \\ x+(k-2)y=5-k \end{cases}$ 的解

Ans: $k \neq 3$ 且-1 時，聯立方程式恰有一解, $k=-1$ 時無解, $k=3$ 無限多解

類題 1

試就實數 k 的值，討論聯立方程式 $\begin{cases} 2x+(3-k)y=-k-5 \\ (3-k)x+2y=k-7 \end{cases}$ 的解

Ans: $k \neq 1$ 且 5 時，聯立方程式恰有一解, $k=5$ 時無解, $k=1$ 無限多解

$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$ $y=\underline{8}$

$\begin{cases} 2a+3b=2 \\ 1a+2b=5 \end{cases}$ $b=\underline{8}$

$\begin{cases} 2(t+k)+3(t-k)=2 \\ 1(t+k)+2(t-k)=5 \end{cases}$ -1 $t-k=8$

逃生

範例8.

已知聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解為 $x=4$， $y=2$， 求聯立方程式

$\begin{cases} 2b_1x+(2a_1-b_1)y+3c_1=0 \\ 2b_2x+(2a_2-b_2)y+3c_2=0 \end{cases}$的解 $\Rightarrow$ $a_1\left(\frac{2y}{-3}\right)+b_1\left(\frac{2x-y}{-3}\right)=c_1$

係數觀察

Ans: (-6,-6)

$4=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=4k}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=k}$ $2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=2k}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=k}$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} -3c_1 & 2a_1-b_1 \\ -3c_2 & 2a_2-b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2b_1 & 2a_1-b_1 \\ 2b_2 & 2a_2-b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix} -3c_1 & 2a_1 \\ -3c_2 & 2a_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -3c_1 & b_1 \\ -3c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{4\times(-k)}$ $-6\times(-2k)-(-3)\times(4k)$

$=\dfrac{12k+12k}{-4k}=\underline{-6}$ #

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2b_1 & -3c_1 \\ 2b_2 & -3c_2 \end{vmatrix}}{-4k}=\dfrac{-6\times(-4k)}{-4k}=\underline{-6}$ #

範例9.　類題 1

已知聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解為 $x=2$， $y=5$， 求聯立方程式

$\begin{cases} 4a_1x-5b_1y+6c_1=0 \\ 4a_2x-5b_2y+6c_2=0 \end{cases}$的解．

Ans: (-3,6)

範例 9

k 為實數且聯立方程式$\begin{cases}(2-k)x+5y=0\\3x+(4-k)y=0\end{cases}$，若聯立方程式除了$(0,0)$外，還有其他解，則 $k=$______。

Ans: -1 或 7

類題 1

聯立方程式$\begin{cases}2x+y=tx\\4x-y=ty\end{cases}$有異於 $x=0$，$y=0$ 的解，則 $t=$____

Ans: 3 或-2