3-5 重心與質心

在地表附近的任何物體都會受到地球的吸引力，其方向為鉛直向下，稱為**重力**（gravitational force）。只要我們想辦法以一個量值相等、與重力方向相反的力作用在該物體上，則不論此力是作用在物體何處，均可使此物體達到平移平衡，因為該力恰可和物體所受重力抵銷。

但是從轉動平衡的觀點來看，此外力所施加的位置就顯得相當重要，因為該力對於物體所造成的力矩和其作用位置息息相關；而只有在慎選位置之後，使得物體所受的合力矩為零，該物體才可以達到轉動平衡。因為此故，我們把這個非常特殊而重要的位置稱為物體的**重心**（center of gravity）。

以一根水平放置的桿子舉例，為了分析問題方便，我們可以把桿子看成是由 n 個微小的質點所組成，每個質點所受到的重力量值分別記為 W_1、W_2、…、W_n，而其所在位置則分別以 x_1、x_2、…、x_n 表示（圖 3-37）。

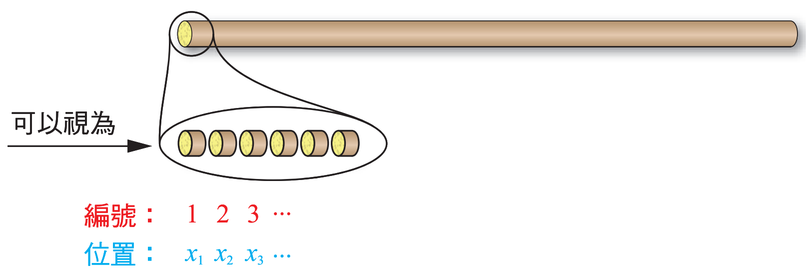


圖 3-37　為了分析問題方便，我們可以把桿子看成是由許多微小的質點所組成。

根據重心的定義，為了使物體達到靜力平衡，所施的外力之量值必須是

$$W_{外力} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

假設以支點為原點，則位於 x_i 處的質點因為受重力作用就會對原點造成一個力矩，且其力臂就是 x_i。因此所有質點的重量對原點造成的合力矩是

$$x_1W_1 + x_2W_2 + \cdots + x_nW_n$$

若重心所在的位置記為 x_G，則合力矩為零的條件便是

$$x_1W_1 + x_2W_2 + \cdots + x_nW_n = x_G W_{外力}$$
$$= x_G\,(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

因此，重心所在的位置便可以利用下式來決定：

$$x_G = \frac{x_1W_1 + x_2W_2 + \cdots + x_nW_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iW_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad \text{3-4 式}$$

稍微推廣一點，若我們考慮的是一個水平擺放的平板狀物體，則只須仿效以上做法，將該物體視為由許多質點組成（如圖 3-38），然後利用類似推論，我們便可以透過空間中的直角坐標將重心的 x 以及 y 坐標表示成

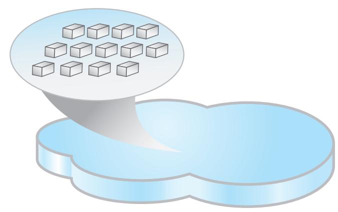


圖 3-38　水平擺放的平板狀物體可視為由許多質點組成

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iW_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad \text{3-5 式}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_iW_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad \text{3-6 式}$$

但是對於三維物體來說又如何呢？（3-5）式及（3-6）式暗示著我們可以再度將物體視為由許多質點組成，同時直接定義重心的 z 坐標為

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_iW_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad \text{3-7 式}$$

不論你如何去翻轉一個剛體，利用（3-5）式、（3-6）式以及（3-7）式所算出來的重心位置相對於那個剛體來說永遠都是同一個點。

對於密度均勻且形狀對稱的物體來說，其重心就在對稱中心或幾何中心的位置，例如均勻的正方形、長方形或平行四邊形等，其重心就在兩對角線的交點處；圓板、圓環、圓球與球殼等的重心在圓心或球心處；三角形平板的重心則在三邊中線的交點處。

重心不一定會落在物體上面，例如圓環的重心是在圓心，但是圓心處並沒有實體的物質存在。

重心概念的引入大大簡化了關於物體靜力平衡的研究，**因為在討論物體受力後的平衡狀態時，我們可以把重力對該物體的影響視為似乎是全部的質量都集中在重心這個點上**。

範例 3-12

直角尺對於木工以及鐵工來講是一種很方便的工具，圖 3-39 中所示為一厚度和密度皆均勻的 L 形直角尺，其寬度甚小、可以忽略。假設長邊和短邊的長度分別為 0.80 m 與 0.40 m，試求此直角尺的重心位置。

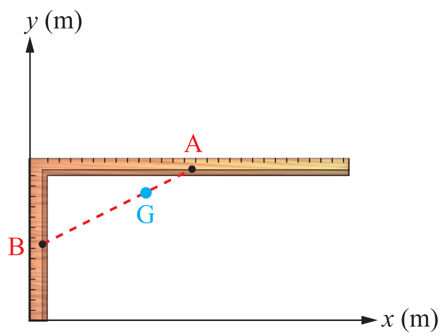


圖 3-39 直角尺

解答

直角尺的長短邊為均勻的材質所構成，其重量可分別設為 $2W$ 和 W，而各自的重心分別落在兩邊的中點 A 和 B（如圖 3-39）。

如果採取圖中的直角坐標系，則 A 和 B 的坐標分別為（0.40 m , 0.40 m）以及（0 m , 0.20 m）。

根據重心的定義可知其坐標為

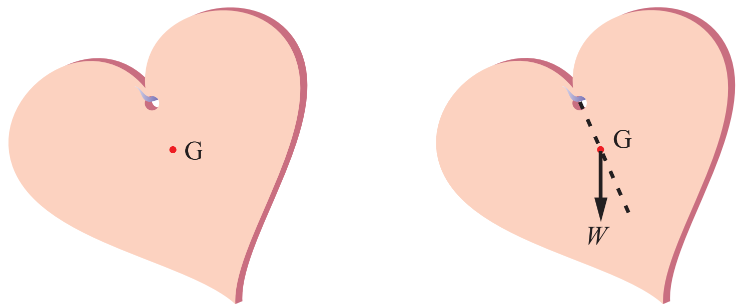
$$x_G = \frac{(0.40\ \text{m})(2W) + (0\ \text{m})W}{2W + W} \fallingdotseq 0.26\ \text{m}$$

$$y_G = \frac{(0.40\ \text{m})(2W) + (0.20\ \text{m})W}{2W + W} \fallingdotseq 0.33\ \text{m}$$

如同正文中所述，物體的重心並不一定會落在物體上面，本題即為一例。

範例 3-13

將圖 3-40 中所示的薄平板物體以一個角度傾斜懸吊在牆壁的掛鉤上，並用手將之扶住，以避免物體轉動。若物體的重心位置為 G，則：



(a)　(b)

圖 3-40　(a)懸吊在牆壁的掛鉤上之物體；(b)物體的重量可視為完全集中於重心；物體受本身重力的影響會有一個順時針方向的力矩。

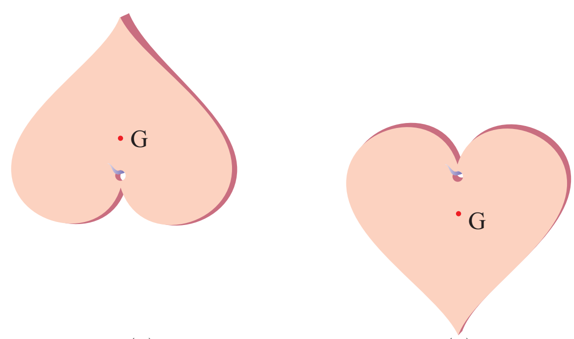
(1) 放手後的一瞬間，此物體受本身重力的影響會往哪個方向擺動？

(2) 請畫出放手後物體在達到靜力平衡時的懸垂情況。

解答

(1)由於我們可以把物體的重量視為完全集中於重心， 因此在放手後的一瞬間，此物體受本身重力的影響會有一個順時針方向的力矩（如圖 3-40 (b)所示），因此會往順時針方向擺動。

(2)此物體若要達到靜力平衡，則它受到的合力矩必須為零。所以只有當重心 G 的位置與支撐點之連線剛好在鉛直方向時物體才可以達到平衡（此時力臂為零，因此沒有力矩）。而這有兩種可能性，如圖 3-41 所示。若是單純憑著物體平衡時的狀況來判斷，此兩種可能性都是允許的，但日常生活經驗告訴我們，圖 3-41 (a)其實是不穩定的，因為只要有一點點的偏移，則物體就會往下擺動，最後成為圖 3-41 (b)的狀態。



(a)　(b)

圖 3-41　懸吊在牆壁的掛鉤上之物體有兩種可能之靜力平衡方式。

以上的例子告訴我們一個很重要的概念：僅僅單純地討論物體所能達到的靜力平衡狀況並不一定能夠完全和日常生活經驗吻合，因為**平衡有穩定以及不穩定的區別，而不穩定的系統很容易因為受外界的干擾而偏離平衡狀態**。

此外，上例還告訴了我們：**如果物體有一個固定的支點，則在靜力平衡的條件下，重心必須落在支點的下方（亦即重心比較低的平衡態）才會穩定。**

本章的章前照片中的玩具鳥之所以不會倒下來，最主要的原因就是這個玩具的設計師充分掌握了這個物理原理：玩具鳥的兩翅其實都特別增加重量，使得其重心會落在尖嘴的下方。

有趣的是，這個現象看在德國哲學家叔本華的眼中，竟能啟發他將意見比喻為單擺，而說出「如果任它偏到重心的一側，結果它必然以等幅度擺回另一側」這種富含哲理的話。

做一做

1. 準備一個小馬鈴薯（重量低於 80 公克重）、兩把金屬叉子（每把重量大於 40 公克重）、2 公分長度的一小段牙籤、以及一根平頭的竹筷子。
2. 將小馬鈴薯切半以減小重量，並依圖 3-42 所示將金屬叉子對稱插入馬鈴薯兩側，再將小牙籤自馬鈴薯底部插入約 1 公分深。
3. 握住直立的竹筷，使平頭的那端朝上，然後將牙籤突出的一端置於竹筷子之上。你會發現馬鈴薯與叉子雖然只是被牙籤尖端的一個支點撐住，但卻不會掉下來。
4. 輕輕搖晃一下竹筷子，看這個自製玩具是否處於穩定平衡。
5. 如果當初小馬鈴薯不切半或是逕用大的馬鈴薯，則又如何呢？

圖 3-42　利用廚房中簡單的器物體驗靜力平衡。

在以上的討論中，我們都是假設支點是固定的，但如果物體偏離平衡點的時候其支點也跟著改變了，那又如何呢？

讓我們以不倒翁這種玩具來做例子。為了簡化問題，我們可以假設不倒翁的底部是球面，其球心為 C（如圖 3-43 所示）。從圖中我們可以看得出來不倒翁傾斜時，C 點並不升高，而不倒翁的重心 G 和球心 C 比起來位置偏低，所以當它傾斜的時候重心會升高，其自身的重力會對接觸點產生一個回復力矩，使不倒翁可以回復原始之正立的狀態。

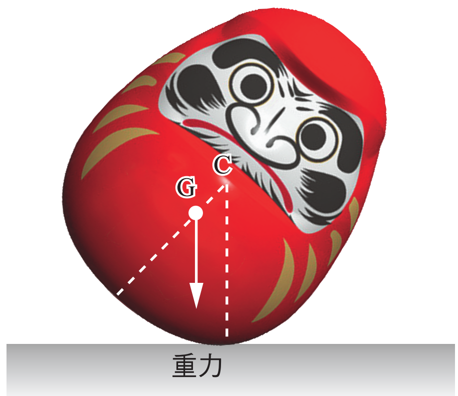


圖 3-43　不倒翁

做一做

如圖 3-44 所示，將腿部向後緊靠牆壁，則當他的上半身向下彎時，身體的重心也會跟著改變。請問當他的上半身彎至何種程度時此人將會傾倒？

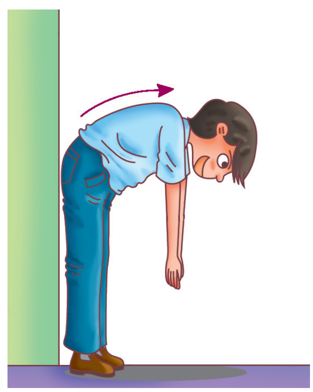


圖 3-44

【提示】

1. 身體前傾彎曲的人看起來是不是有點像圖 3-39 中的直角尺呢？在範例 3-12 中我們學到了一個概念：直角尺的重心是落在直角尺之外。因此，靠牆壁站著而前傾的人，其重心也是落在人體之外。
2. 接著再想一想，站在牆邊的這個人的支點究竟在哪裡？這個人的重心與其支點的相對位置是什麼樣的關係？
3. 如果重心離牆壁比較遠，則對於這個人站立時的穩定性有什麼影響？

和「重心」有密切關係的另外一個物理概念便是「**質心**」（center of mass）。利用組成一個物體的質點所受到的重力，我們可以對一個在地球表面附近的物體定義出其重心。可是如果把此物體移到沒有重力的外太空，則重心一詞似乎完全失去了意義。可喜的是，只要做適當的調整，我們仍可使重心所代表的意涵完整保留下來。

要辦到這件事，我們只須注意到：一個具有質量 m 的質點所受到的重力，是等於其質量乘上當地的重力加速度 g。故在重心的定義（3-4）式中，我們可以將處在均勻重力場中物體的 W_1、W_2、⋯以 m_1g、m_2g、⋯取代，即

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{x_1W_1 + x_2W_2 + \cdots + x_nW_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n} \\
&= \frac{x_1m_1g + x_2m_2g + \cdots + x_nm_ng}{m_1g + m_2g + \cdots + m_ng} \\
&= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots x_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}
\end{aligned}
$$

3-8 式

換言之，我們當初根本可以透過（3-8）式，直接利用質點的質量來定義出重心的概念！正因此，我們把這樣定出來的點稱為質心。

質心的概念不只適用於剛體，就算組成一個系統的粒子彼此之間有很複雜的相互運動以及交互作用，質心的概念仍然有效。不過定義質心的好處，必須留待後面第六章第二節的質心運動內容後才能有更進一步的領會。