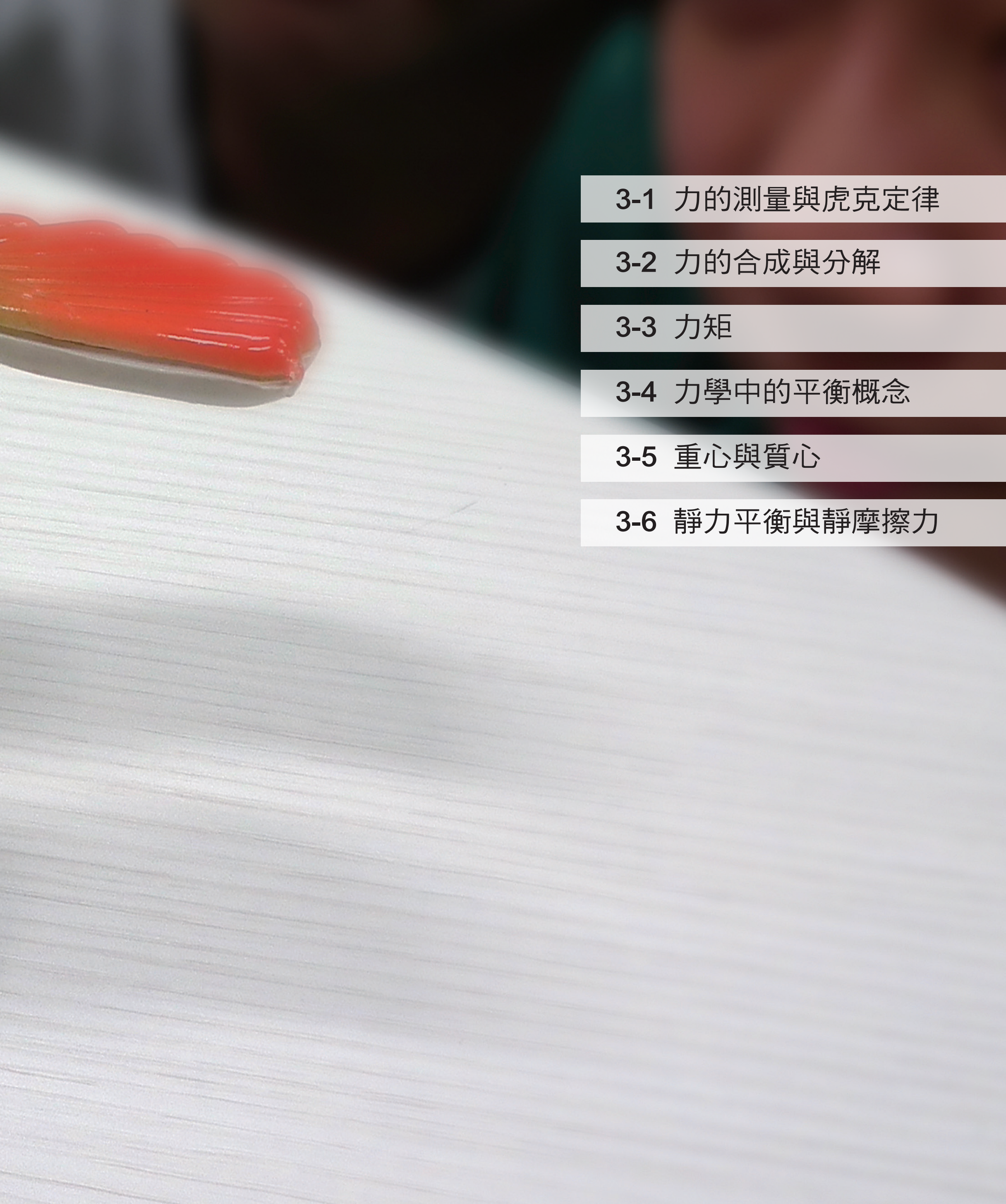
3 靜力學



自然界中的許多飛鳥都是平衡高手，但圖中這隻玩具鳥也不遑多讓，因為僅憑著嘴尖的一個小小支點，它竟然也能撐住了自身重量，完全不會摔下來！這是如何辦到的呢？

名人語錄

Opinion is like a pendulum and obeys the same law. If it goes past the centre of gravity on one side, it must go a like distance on the other; and it is only after a certain time that it finds the true point at which it can remain at rest.

意見就像單擺一樣並遵守相同的定律。如果任它偏到重心的一側，結果它必然以等幅度擺回另一側。只有歷經一段時間後它才會尋覓到真正靜止的點。

— 叔本華（*Arthur Schopenhauer, 1788-1860*）

在日常生活中，我們經常可以感受到力的存在，並體驗它所造成的不同效果。抓著美味的漢堡用力咬下一口，這個力道可是會直接破壞麵包的完整性、並切開醃黃瓜以及裡面所夾的肉塊！為了展現自己已經吃飽了，用手輕壓一下圓鼓鼓的肚子，一放手，肚子又變回剛剛「傲人」的模樣；這表示力也可以使物體變形，而物體則有想恢復原狀的彈性。

餐點用畢後，經過充分的休息，同學們決定來場籃球大賽。接到隊友傳來的球，奮力將之投向籃框，不論球進了沒，我們都看到了力可以改變籃球速度的事實。隔不到一分鐘，為了搶球，一個不小心，竟然被對方球員狠狠撞到連滾帶爬；這時你親身體驗到的，是不折不扣的力還可能使物體翻轉的現象！

以上這些力的表現比較偏向動態，我們會在後面的章節陸續處理。在本章中我們則先討論比較簡單的情況，那就是物體受到數個不同的外力作用之後，仍可以維持靜止不動；此時我們就稱該物體達到了**靜力平衡**（static equilibrium）。雖然達到靜力平衡的物體不會運動，但這不表示靜力平衡的研究就很呆板無趣。事實上，靜力平衡的例子在生活中隨處可見、而且非常重要。例如，把鋁梯架設起來以便爬上去安裝天花板的燈泡，或者高樓大廈能夠在地面屹立不搖，這些都是和我們生活安全息息相關的靜力平衡之實例。而 2010 年四月所發生的國道高速公路旁邊的「走山」事件（圖 3-1），則是物體（山坡）失去靜力平衡後所造成的怵目驚心景象。

圖 3-1　2010 年四月所發生的國道高速公路旁邊的「走山」事件

3-1 力的測量與虎克定律

從本章前面的介紹中可以看得出來，物體受到力的作用後會產生的變化包括：物體被破壞、物體產生形變、以及物體的運動狀態發生改變。反過來看，我們當然就可以利用物體被破壞的程度、物體變形的大小、以及物體運動狀態的改變來測量作用在物體上的力究竟有多大。但是從實用的觀點看，第一種方式具有破壞性，不適合用來反覆分析力的作用；第三種方式則因為牽涉到物體動態的表現，其行為可能比較複雜，我們留待以後的章節再來研究。因此本節只針對物體的形變與作用力的關係作探討。

一般而言，物體受力之後都會產生形變，只是有些物體的形變量很小，不易測量。在物理學上，我們將完全不會產生形變的理想物體稱為**剛體**（rigid body）。在合理的使用範圍內，日常生活中所接觸到的許多物體，例如教室中使用的木桌椅，以及民俗表演中的陀螺與扯鈴，都可以被近似地視為是剛體。

小知識　剛體

把物體近似看成剛體究竟有什麼好處呢？由於剛體受力不會變形，因此外力只能改變它的運動速度、或者是轉動狀態。就這層意義來講，剛體受到外力作用後的表現變得相對容易描述（不過是平移以及轉動的組合而已），因此在物理的應用上經常可見。課文中介紹的許多物體都可以被視為剛體，那麼啦啦隊表演時，被拋向空中的隊員（如圖 3-2）是否也能當作剛體呢？

圖 3-2　啦啦隊將隊員拋向空中

許多物體在受力發生形變時，都會有恢復原狀的趨勢，並對外界的施力者產生一個作用力，這種力稱為**回復力**（restoring force），或稱為**彈性力**（elastic force）。回復力的量值和物體的形變有關，如果形變不大，則當外界不再施力時，物體會藉由回復力而恢復原狀。但若物體的形變超過某個極限，通常就無法恢復原狀，這個極限值稱為**彈性限度**（elastic limit）。

做一做

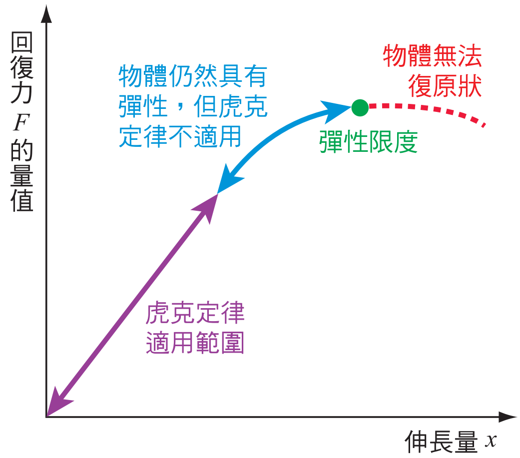
以雙手將一條橡皮筋拉開，你立刻就會感受到彈性力的作用；而且放手後橡皮筋又會恢復原狀。但是用力拉扯保鮮膜，效果就很不同；試試看，你很容易就可以體會彈性限度的真正意義。

當形變不是很大的時候，許多物體的回復力和形變成正比；一個相當常見的例子便是螺旋彈簧。假若以 x 代表彈簧偏離平衡點的伸長量或壓縮量（$x > 0$ 代表彈簧被拉長，而 $x < 0$ 代表彈簧被壓縮），同時以 F 代表回復力，則在一定的限度內這兩者之間的數學關係可寫成

$$F = -kx \quad \text{3-1 式}$$

這關係稱為**虎克定律**（Hooke's law）。需注意的是，上式中的負號代表回復力的方向始終和伸長量相反，亦即彈簧被拉長時（$x > 0$），此力有要將之縮短的趨勢（$F < 0$），而當彈簧被壓縮時（$x < 0$），此力則有要將之頂得更長的趨勢（$F > 0$）。此外，（3-1）式中的比例常數 k 稱為彈簧的**力常數**（force constant）或**彈性常數**（spring constant）；

其單位在國際單位制中為牛頓/米（N/m）[註]，但在日常生活中有時也可能因為方便而取為公斤重/米（kgw/m）或公克重/公分（gw/cm）。在圖 3-3 中，紫色直線這一段的部分便適用（3-1）式。



▲ 圖 3-3　回復力的量值與彈簧伸長量之間的關係

範例 3-1

一條輕彈簧（其質量可以忽略）沿著鉛直方向懸掛 80 公克重的物體時，全長為 22 公分；改掛 140 公克重的物體時，全長為 25 公分。則該彈簧之力常數為何？該彈簧的原始長度為何？

解答

當彈簧懸掛 80 gw 的物體，處於靜止不動時，彈簧的回復力也為 80 gw。改掛 140 gw 的物體後，等系統再度靜止不動，此時彈簧的回復力則對應地增加為 140 gw。

假設彈簧原長為 L 及力常數為 k（gw/cm），

則由虎克定律可知

$$80\ \text{gw} = k\,(22\ \text{cm} - L) \qquad ①$$

$$140\ \text{gw} = k\,(25\ \text{cm} - L) \qquad ②$$

將①及②兩式聯立可以解得力常數 $k = 20$（gw/cm），

而彈簧原長為 $L = 18$ cm。

[註] 牛頓為力的國際單位，我們將於第四章第二節做更詳盡之討論。

假設實驗室中只有數條完全相同的彈簧，為了實驗上的需求，必須要有一個較強的彈簧（亦即它的力常數比較大），此時有沒有什麼簡便的因應方法呢？

一個辦法就是利用圖 3-4 所顯示的方式將兩個彈簧**並聯**（in parallel）在一起。如果我們將整個裝置拉長一個長度 x，則因為個別的彈簧都被拉長一個長度 x 而有一個回復力 kx，因此整個裝置的回復力會相加在一起而成為 $2kx$。這意味著整個裝置有一個等效的力常數 $2k$。

如果我們利用圖 3-5 的方式改將兩個彈簧**串聯**（in series）在一起，則又如何呢？此時若將整個裝置拉長一個長度 x，則個別的彈簧只會被拉長 $\frac{x}{2}$，因此這個裝置的回復力只有 $k\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{k}{2}\right)x$。這意味著整個裝置有一個等效的力常數 $\frac{k}{2}$，因而可視為一個比較弱的彈簧。

串聯與並聯的概念使得我們在實際應用上有更大的揮灑空間。有趣的是，類似的概念我們將來在電學的研究中還會再度碰到。

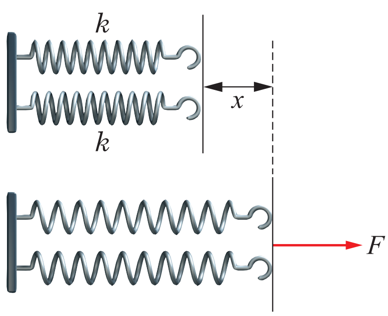


圖 3-4　彈簧並聯可以使有效的力常數變大。

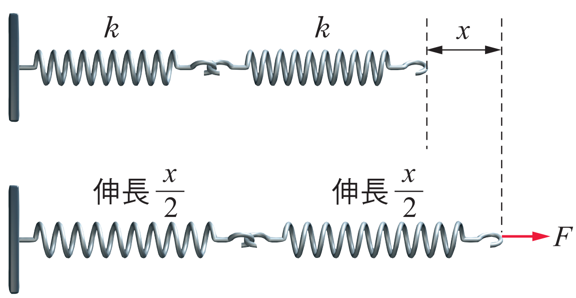


圖 3-5　彈簧串聯可以使有效的力常數變小。

小知識 彈簧

你是否曾經因為以下兩個問題而覺得非常納悶：一、彈簧這麼一個簡單的系統究竟有什麼特別而值得我們花那麼多時間去研究？二、虎克定律只不過是彈簧的回復力以及變形量之間的關係，為什麼我們要賦予它「定律」這麼重要的地位呢？

其實很多達到平衡的物理系統在受到微小擾動後都會有想要回復原始狀態的趨勢，而該回復的趨勢也常常都與擾動量的量值成線性關係，就如同彈簧的虎克定律一樣。此外，一旦了解了彈簧遵守虎克定律之後，只要再深入探討彈簧的運動規律，便可以舉一反三地應用於解決其他物理系統偏離平衡狀態後的運動現象。也正因為這個緣故，詳細討論彈簧的運動在力學上就具有相當典型而重要的地位。

雖然在中學課本中我們所討論到的彈簧都是所謂的螺旋彈簧，但是彈簧在日常生活中卻經常以不同的面貌出現，例如汽車的避震器、鑷子、以及文具中的長尾夾等等都可視為一種彈簧；圖 3-6 顯示的只是生活中常見的部分彈簧。

圖 3-6　各式各樣的彈簧

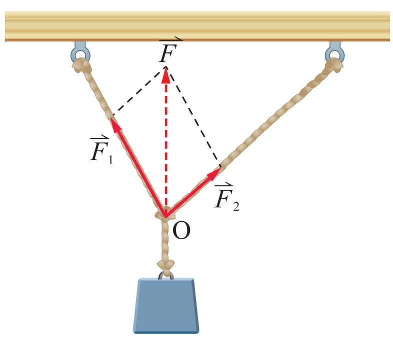
3-2 力的合成與分解 Physics

1 力的合成

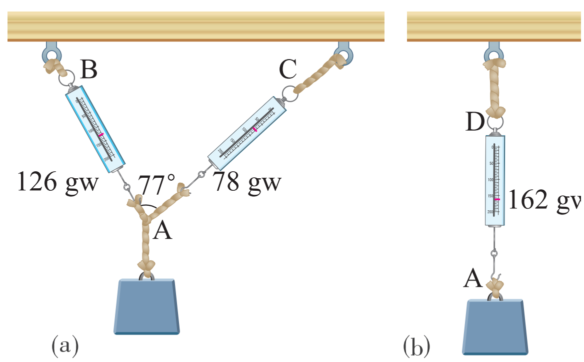
日常生活的經驗告訴我們，物體所受到的作用力不只有量值而且有方向。在前兩章中學過的位移和速度以及加速度也都具有這種特性，而當時我們曾將這一類的物理量統稱為向量。這意味著作用力應該也是一種向量。

可是我們不能僅僅因為一個概念含有方向以及量值就認定它是一個向量，原因是向量還必須滿足其他一些簡單的特性。例如，我們可以將兩個位移向量相加在一起而合成出一個位移向量。但是作用力是否也具有這種性質呢？

其實只要透過簡單的實驗便可以驗證作用力確實滿足向量可以相加合成之特性。例如，在圖 3-7 中物體靜止不動後，則兩條懸線作用在 O 點的作用力$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$可以合成出一個效果完全相同的作用力（稱為**合力**）；且合力$\vec{F}$必然是在鉛直方向，而其量值恰與物體重量相同，這樣才能和圖中物體的重量互相抵銷。若要以實驗來檢測這個概念，則$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$作用力的量值可以透過圖 3-8 (a)的彈簧秤來測量，而此兩力之合力$\vec{F}$的量值是和物體的重量相等，因此可以經由圖 3-8 (b)的彈簧秤來測出其量值。



▲ 圖 3-7　作用在 O 點的兩個作用力$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$可以合成出一個效果完全相同的作用力$\vec{F}$。



▲ 圖 3-8　(a)利用彈簧秤來測量兩條懸線上作用力的量值；(b)利用彈簧秤來測量合力的量值。

此外，實驗也顯示出來，兩個作用力 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 相加時，其合力 $\vec{F}$ 的量值以及方向可以利用所謂的平行四邊形法來決定（參見圖 3-9），其程序是：先讓 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 兩個向量具有共同的起點 O，接著以這兩個向量為邊畫出一個平行四邊形，則由 O 點出發所繪出之平行四邊形的對角線 $\overline{OA}$ 便是合力 $\vec{F}$ 。

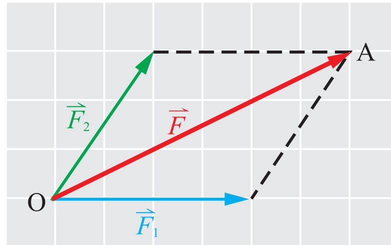


圖 3-9　兩向量 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 相加的平行四邊形法。

另外一種求合力 $\vec{F}$ 的方法稱為三角形法（參見圖 3-10 (a)），其程序是：先畫出 $\vec{F}_1$ 向量，然後平移 $\vec{F}_2$ 使得 $\vec{F}_2$ 向量的起點與 $\vec{F}_1$ 的終點一致，則由 $\vec{F}_1$ 的起點至平移後 $\vec{F}_2$ 的終點所繪出之箭頭便是合力 $\vec{F}$ 。

有趣的是，我們也可以將以上兩個向量的次序對調（參見圖 3-10 (b)），亦即先畫出 $\vec{F}_1$ 向量，然後平移 $\vec{F}_1$ 使得 $\vec{F}_1$ 向量的起點與 $\vec{F}_2$ 的終點一致，此時由 $\vec{F}_2$ 的起點至平移後 $\vec{F}_1$ 的終點所繪出之箭頭仍是合力 $\vec{F}$ 。換句話說，**兩個作用力相加的次序不會影響最後的結果**（$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}_2+\vec{F}_1$）。這個結論相當有用，因為當有多個力同時作用在物體的一個點上時，我們便可以先將其中任兩力合成，接著再將之與第三個力合成，依此類推來簡化問題，而不用擔心最後所得到的結論會與分析問題時的化簡次序有關。

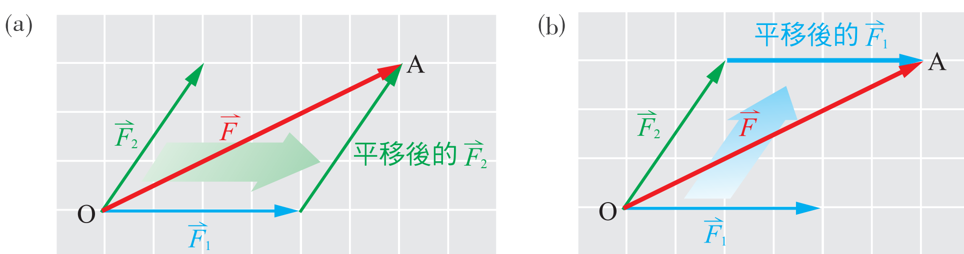


圖 3-10　(a)兩向量 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 相加的三角形法：$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}$；(b)兩向量相加的三角形法之另一種建構方式：$\vec{F}_2+\vec{F}_1=\vec{F}$ 。

小知識　向量交換律

任何兩個向量相加的次序不會影響最後的結果，這個重要的特性稱為向量的交換律。

範例 3-2

如圖 3-11 (a)所示，將一幅畫以細懸線掛在牆壁的釘子（O 點）上。懸線是對稱地透過畫框上 A、B 兩點以斜向支撐畫作，且已知懸線上的張力都是 10 牛頓。若懸線和垂直方向的夾角是 60°，請問這幅畫的重量為何？

圖 3-11

解答

這幅畫的重量是由懸線上的兩個斜向作用力 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 來共同支撐，所以只要計算出此二力的合力 $\vec{F}$ 便可。參考圖 3-11 (b)，由向量相加的三角形法可以看出來：

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$$（紅色箭頭所示）

由於所形成的三角形是一個正三角形，所以合力 $\vec{F}$ 的量值是 10 牛頓，而且方向是鉛直向上。這個力便是支撐這幅畫的淨力；而此力的量值也就是該幅畫的重量。

2 力的分解

上小節力的合成方法，讓我們可以化繁為簡地將數個力的作用改由單獨一個力來取代。反過來，有些時候我們則會刻意將一個力分解成數個不同方向的作用力，以方便分析問題。

舉個例說，當你用力拖著行李往前走的時候，施力的方向通常都會和水平面有一個角度（圖 3-12）。此時若把拖拉行李的力分解成水平以及鉛

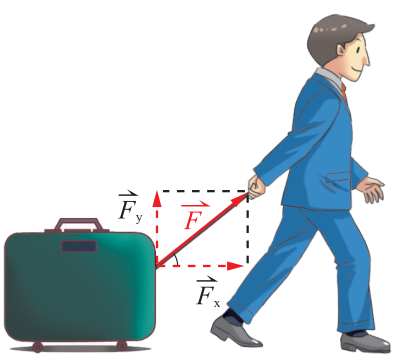


圖 3-12　拖著行李往前走的時候，施力的方向通常都會和水平面有一個角度。

直兩力的合成，則可以清楚看出所施的力發揮了以下若干功用：鉛直方向的分力（如圖 3-12 中之 $\vec{F}_y$）可部分抵銷（笨重的）行李壓在地面的力，從而減小地面對行李輪子的摩擦力，並減少輪子的磨損；而水平方向的分力（如圖 3-12 中之 $\vec{F}_x$）則可用來克服地面的摩擦力，將行李拖拉前進。

究竟要如何將一個力作分解，端視實際例子中所想探討的問題而定，無須刻板地墨守成規。例如，一部直立式鋼琴所受到來自地球的重力必然是在鉛直的方向，但是對於想將它沿著斜面推上卡車的搬運工來說，他最在乎的可能是要花多大的力氣才可以順利達到目的。分析這個問題時，若將鋼琴所受到的重力分解成沿著斜面以及垂直斜面的分力就很方便了，因為搬運工起碼要能撐住鋼琴的重量在斜面上的分力才能使鋼琴沿著斜面推上去（圖 3-13）。

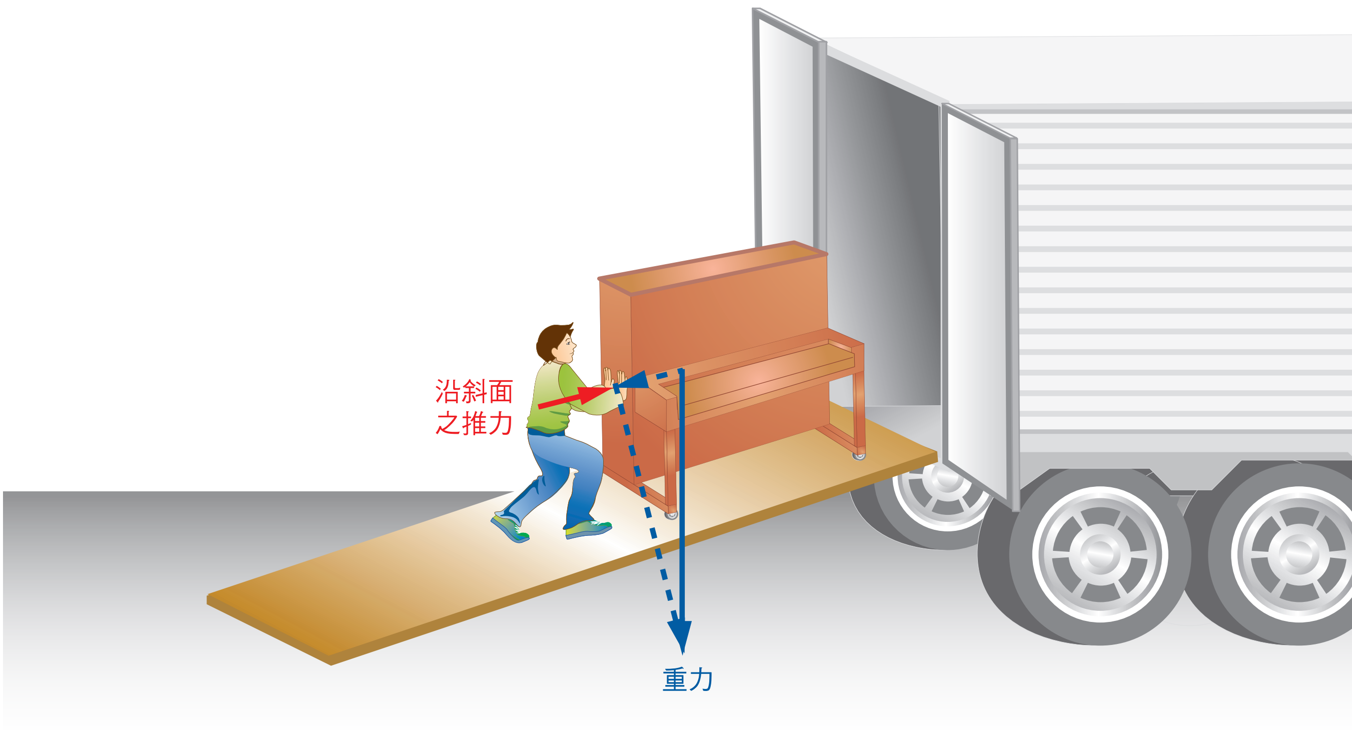


圖 3-13　搬運工起碼要能撐住鋼琴的重量在斜面上的分力才能使鋼琴沿著斜面推上去。

再一次，必須強調的是：**即便是在同一個問題中，隨著目的之不同，力的分解方式就可以各異，並不固定**。

不論是要做力的合成或分解，實作上我們多半會先選定一個直角坐標，然後將所有的作用力在這坐標系中兩方向的分量全部列出，接著再對各分量進行實際的合成或分解之計算。 這雖然不一定最快速有效，但卻是一種相當穩妥而萬無一失的作法；而且它也和數學家透過坐標系來將幾何問題與代數相結合的精神完全吻合。

範例 3-3

同前小節曾經討論過的範例 3-2，以細懸線將一幅畫掛在牆壁上。則應如何利用直角坐標系求其合力？

解答

設定問題的坐標系，使 O 點為原點，並取水平往右之方向當成坐標系的正 x 軸，而鉛直往上之方向當成坐標系的正 y 軸（如圖 3-14）。在進行力的合成與分解時，不用考慮施力點的位置。所以我們可以方便地將 $\vec{F_1}$ 以及 $\vec{F_2}$ 平移，使得它們都是以 O 點為起點的向量（圖 3-14 中綠色及藍色虛線箭頭）。

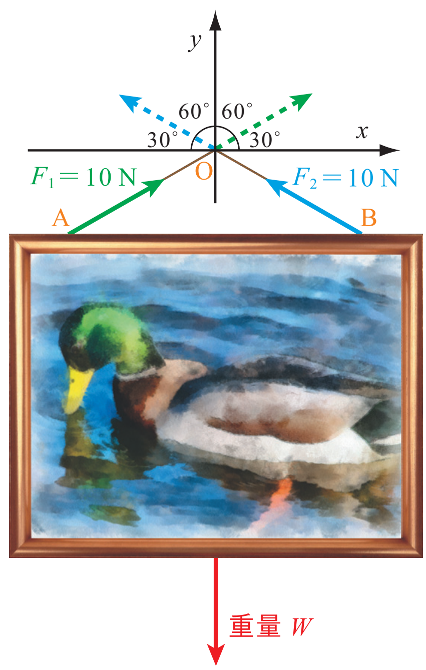


圖 3-14

解法一：將水平以及垂直分量個別討論

今若以牛頓作單位，則這兩個力的水平分量分別是

$$F_{1x}:\ (10\text{ N})\cos 30^\circ = (10\text{ N})\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{ N}$$

$$F_{2x}:\ (10\text{ N})(-\cos 30^\circ)$$

$$= (-10\text{ N})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3}\text{ N}$$

故 $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ 的水平分量就是

$$5\sqrt{3}\ \mathrm{N}+(-5\sqrt{3})\ \mathrm{N}=0$$

至於垂直分量則分別是

$$F_{1y}：(10\ \mathrm{N})\sin 30^\circ=5\ \mathrm{N}$$

$$F_{2y}：(10\ \mathrm{N})\sin 30^\circ=5\ \mathrm{N}$$

故 $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ 的垂直分量是 $5\ \mathrm{N}+5\ \mathrm{N}=10\ \mathrm{N}$
所以合力的量值是 10 N，且其方向在正 y 軸（即鉛直向上），因此與之前的結論完全相同。

解法二：更簡單的數學表示法

如果將以上的說明改用數學上的坐標表示法來記述，其實會簡潔許多，因為

$$\vec{F}_1=((10\ \mathrm{N})\cos 30^\circ,(10\ \mathrm{N})\sin 30^\circ)$$
$$=((10\ \mathrm{N})(\frac{\sqrt{3}}{2}),(10\ \mathrm{N})(\frac{1}{2}))=(5\sqrt{3}\ \mathrm{N},5\ \mathrm{N})$$

$$\vec{F}_2=((10\ \mathrm{N})(-\cos 30^\circ),(10\ \mathrm{N})\sin 30^\circ)$$
$$=((10\ \mathrm{N})(\frac{-\sqrt{3}}{2}),(10\ \mathrm{N})(\frac{1}{2}))$$
$$=(-5\sqrt{3}\ \mathrm{N},5\ \mathrm{N})$$

故 $\vec{F}_1+\vec{F}_2=(5\sqrt{3}\ \mathrm{N},5\ \mathrm{N})+(-5\sqrt{3}\ \mathrm{N},5\ \mathrm{N})$
$$=(0,10\ \mathrm{N})$$

為了加強你的印象，本章後面的範例說明有些會穿插採用這種數學記法。