4-2 牛頓第二運動定律

前節牛頓第一運動定律告訴我們，在慣性參考系中，物體如果沒有受到外力作用，則其速度將不會改變，但若是物體受力作用時，其運動狀態會產生怎樣的變化呢？

經由前人的實驗觀察與分析思辯，逐步建立運動和力的概念，最後導致牛頓將力與加速度的關係歸納成為牛頓第二運動定律，以下將介紹得到這種結論的重要發展脈絡。

在討論科學的緣起時，常溯源自西方亞里斯多德的學說。基於觀察生活經驗事實，他在《物理學》[註] 中提出許多關於自然現象的論述：「任何運動的物體都應受推動而運動」，也就是說力是物體運動的原因，沒有力的作用，物體就不會運動；「物體的運動基於物體本來的傾向本質，不同重量的物體下落的速度不相同」，表示物體的運動及運動速度的量值都決定於外力。

亞里斯多德大多以理論性而非定量性描述科學現象，更缺少實驗及實際的測量。所以到了十六世紀以後，當科學家開始以實驗方法進行物理學的研究時，亞里斯多德的論述就被發現許多錯謬之處。

想一想

上述亞里斯多德基於觀察生活經驗的說法，就現今的觀點來看是否能夠成立？

伽利略重視數學應用在科學研究上的重要性，並用來做定量的探索物理問題。他分析物體的運動現象，在實驗結果中發現物體不受力時，應作等速運動；但在自由下落時作的是等加速運動。

英國物理學家霍金（Stephen Hawking，1942-，圖 4-9），稱讚伽利略說：「自然科學的誕生應歸功於伽利略，他在這方面的功勞大概無人能及。」

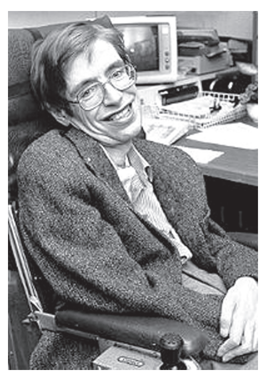


圖 4-9 霍金

[註] 或稱《自然哲學》

最後牛頓將運動的現象與運動的原因做了徹底的探討，在《自然哲學的數學原理》書中歸納出來：作用在物體上的力，都是會改變物體原有運動現狀的一種作用，最後又寫下了牛頓第二運動定律，改寫成現代的說法如下：

第二定律：當物體受到淨力作用時，必在力的方向上產生加速度，其量值與所受的淨力成正比，而與物體的質量成反比。

若 $\vec{a}$ 為物體的加速度，$\vec{F}$ 為物體所受的淨力（有時寫成 $\Sigma\vec{F}$），m 為物體的質量，則牛頓第二運動定律可以用數學式表示：

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad \text{4-1 式}$$

若質量為 1 公斤（kg）的物體受力作用時，能產生 1 公尺/秒 ^{2}（$\mathrm{m/s^2}$）的加速度，則由（4-1）式可得物體所受的作用力為

$$F = ma = (1\ \mathrm{kg})(1\ \mathrm{m/s^2}) = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

在國際單位制中將公斤‧公尺/秒 ^{2}（$\mathrm{kg \cdot m/s^2}$）定義為牛頓（N），即 $1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2} = 1\ \mathrm{N}$。

質量為 1 公斤的物體在地表的重量稱為 1 公斤重（kgw），則可由地表的重力加速度 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ 推算 1 kgw 相當於 9.8 N。

小知識　原始的牛頓運動定律並非目前課本的敘述

在《自然哲學的數學原理》書中，牛頓第二運動定律原以拉丁文寫成，Motte 在 1729 年將此書翻譯成為英文；若將牛頓所用的術語改為現代所能理解的講法，牛頓第二運動定律的敘述應為：物體的運動變化量正比於所受的外力，且其方向在沿外力作用的直線方向上。

在牛頓寫出運動定律的五十年後，瑞士科學家歐拉（Leonhard Euler, 1707-1783），如圖 4-10，寫下 $F = ma$ 的數學式。

圖 4-10　歐拉

範例 4-1

超市裡，媽媽在水平方向施力 2.5 公斤重推著滿載的購物車，小孩在前面也以水平方向施力 1.5 公斤重幫忙拉著車子前進，如圖 4-11。若地面的摩擦力甚小可以忽略，購物車的質量為 25 公斤，而所獲得的加速度量值為 0.98 公尺/秒^2，則他們所購物品的質量有多少？

圖 4-11　媽媽和小孩對滿載的購物車施力。

解答

在牛頓運動定律中，作用力使用的是國際單位制的牛頓，故首先我們需將題目中的 2.5 kgw 及 1.5 kgw 加以換算：

媽媽施力為

$$F_1 = 2.5\ \text{kgw} = (2.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 24.5\ \text{N}$$

小孩施力為

$$F_2 = 1.5\ \text{kgw} = (1.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 14.7\ \text{N}$$

設購物車的質量為 m_1，所購物品的質量為 m_2，購物車的加速度為 a，則由牛頓第二運動定律列式：

$$F_1 + F_2 = (m_1 + m_2)\,a$$

即

$$24.5\ \text{N} + 14.7\ \text{N} = (25\ \text{kg} + m_2)(0.98\ \text{m/s}^2)$$

可解得所購物品的質量為 $m_2 = 15\ \text{kg}$

對某一物體施力，淨力使其產生加速度運動時，依牛頓第二運動定律可以寫出其運動方程式為 $\vec{F} = m\vec{a}$ 或 $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$。固然我們可以使用向量解決問題；但若先將向量適當的分解為相互垂直的分量時，分別在各方向對問題加以分析，則可以簡化問題。

我們可以將所有向量分解為沿著直角坐標軸的 x、y、z 三個分量，則牛頓運動定律可以分別用分量寫成三個方向的運動方程式。淨力在 x 軸的分量可以使物體產生 x 方向的加速度；同理，淨力在 y 軸的分量可以使物體產生 y 方向的加速度；淨力在 z 軸的分量可以使物體產生 z 方向的加速度。即

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = ma_x & \text{4-2 式} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = ma_y & \text{4-3 式} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz} = ma_z & \text{4-4 式} \end{cases}$$

式中 F_{1x}、F_{2x}、…、F_{nx} 分別表示對物體的作用力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、…、$\vec{F}_n$ 在 x 軸方向的分力，而 a_x 則表示物體加速度 $\vec{a}$ 在 x 軸方向的分量，其餘類推。上述介紹僅限於討論物體受力移動的情況；如果物體所受的合力矩不為零時，將造成物體的轉動現象。

範例 4-2

在機場或火車站，常常看到大家拖著旅行箱前進。設旅行箱的質量為 20 公斤，某人以 50 牛頓的拉力拖著旅行箱前進時，若拉力的方向為仰角 37°，且地面的摩擦力甚小可以忽略不計，如圖 4-12，求：

(1) 旅行箱的加速度為若干公尺/秒^2？

(2) 水平地面對旅行箱向上的支撐力為若干牛頓？

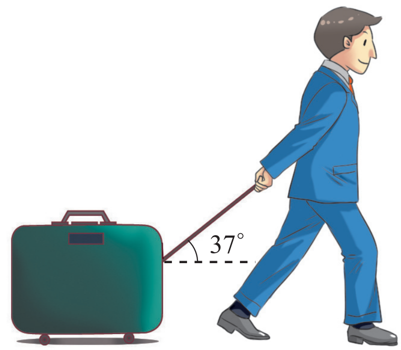


圖 4-12

解答

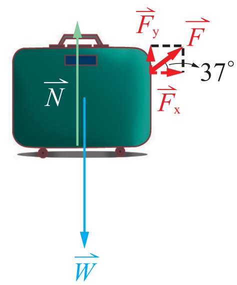


圖 4-13

(1) 如圖 4-13 所示，旅行箱共受三個外力作用：人對旅行箱的拉力 $\vec{F}$、地面對旅行箱向上的正向力 $\vec{N}$ 以及旅行箱向下的重量 $\vec{W}$。將拉力 $\vec{F}$ 分解為水平方向及鉛直方向的 $\vec{F}_x$ 與 $\vec{F}_y$ 兩分向量，即

$F_x = F\cos37^\circ = (50\ \text{N})(\cos37^\circ) = 40\ \text{N}$

$F_y = F\sin37^\circ = (50\ \text{N})(\sin37^\circ) = 30\ \text{N}$

拉力的水平分量使旅行箱作等加速運動，故旅行箱在水平方向應遵守牛頓第二運動定律，即 $F_x = ma_x$，則其加速度 a_x 為

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{40\ \text{N}}{20\ \text{kg}} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

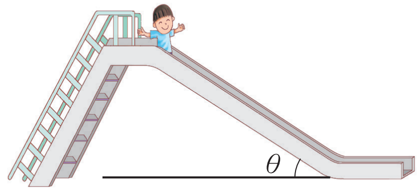
(2) 因為拉力的鉛直分量比旅行箱的重量小，所以旅行箱不會被提離地面。對旅行箱而言，在 y 方向所受的合力應為零，即遵守牛頓第一運動定律，故

$$N + F_y - W = 0$$

故地面對旅行箱向上的支撐力 N 為

$$\begin{aligned} N &= W - F_y = (20\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) - 30\ \text{N} \\ &= 1.7\times10^2\ \text{N} \end{aligned}$$

範例 4-3



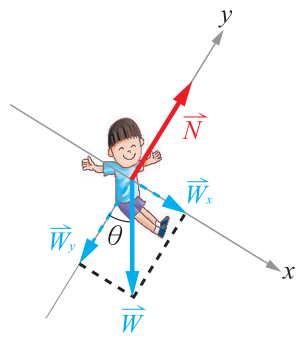
▲ 圖 4-14

如圖 4-14 所示，質量為 m 的阿明沿著傾斜角為 θ 的溜滑梯滑下。若溜滑梯的表面很光滑，產生的摩擦力甚小可以忽略不計時，則：

(1) 阿明沿斜面下滑時的加速度為何？

(2) 斜面對阿明作用的正向力為何？

解答



▲ 圖 4-15　阿明受力沿溜滑梯向下滑行。

(1) 阿明所受的作用力包括鉛直向下的重力 $\vec{W}$ 及垂直於斜面向上的正向力 $\vec{N}$。因為阿明沿溜滑梯的斜面向下滑行，故選擇參考坐標，如圖 4-15 所示，沿斜面向下的方向取為 $+x$ 方向，垂直於斜面向上的方向取為 $+y$ 方向。將重量 $\vec{W}$ 分解成 $\vec{W}_x$ 與 $\vec{W}_y$ 兩分向量，其量值為

$$W_x = W\sin\theta = mg\sin\theta$$

$$W_y = W\cos\theta = mg\cos\theta$$

在 x 軸方向，阿明沿斜面作等加速運動，由牛頓第二運動定律可列式如下

$$F_x = ma_x$$

故阿明在 x 軸方向的加速度 a_x 為

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{W_x}{m} = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$

(2) 在 y 軸方向，由於阿明沿斜面下滑，不會脫離斜面，因此淨力應為 $\Sigma \vec{F}_y = 0$，即

$$\vec{N} + \vec{W}_y = 0$$

故斜面對阿明作用的正向力 $\vec{N}$，其量值為

$$N = W_y = mg\cos\theta$$

雖然日常生活中的力學問題五花八門，例如將若干物體以繩子或彈簧連結成為一個系統，或再加上滑輪，使得狀況變得更複雜，我們仍然可以活用牛頓運動定律，對這些力學問題加以剖析。將系統內某個物體，或幾個物體與系統內其他的物體區隔，利用前章介紹自由體受力圖的方法繪圖，並列出其運動方程式，即可分析其受力與運動的現象。

範例 4-4

將細繩跨過定滑輪，並在細繩兩端分別繫有兩物體的裝置稱為**阿特午機**（Atwood's machine），如圖 4-16 所示。若物體 A 的質量為 m_1，物體 B 的質量為 m_2，且 $m_1 > m_2$，並假設滑輪為光滑無摩擦，細繩的質量可以忽略不計，且滑輪兩邊繩上的張力量值相等，則：

(1) 兩物體的加速度各為何？

(2) 細繩上的張力為何？

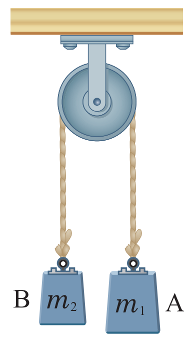


圖 4-16

解答

將物體 A 與物體 B 所受的作用力繪出並標示，如圖 4-17 所示。由於 $m_1 > m_2$，所以 m_1 必向下加速運動，而 m_2 必向上加速運動。設加速度的量值為 a，取向上的方向為正，向下為負時，物體 A 的加速度為（$-a$），物體 B 的加速度為 a。對物體 A 而言，共受二力作用：一為重力 $m_1 g$，其方向向下；另一為細繩張力 T，其方向向上。此二力之合力造成其向下之加速度，依牛頓第二運動定律列式如下：

$$T - m_1 g = m_1(-a) \quad ①$$

同理，物體 B 共受二力作用：一為重力 $m_2 g$，其方向向下；另一為細繩張力 T，其方向向上。此二力之合力造成其向上之加速度，依牛頓第二運動定律列式如下：

$$T - m_2 g = m_2 a \quad ②$$

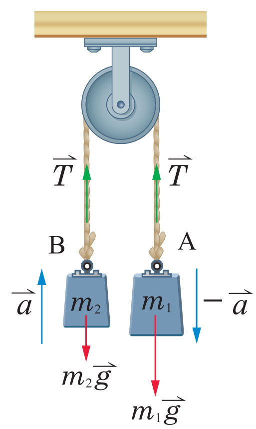


圖 4-17　兩物體受力分別作等加速運動。

解聯立方程式①式與②式，可得

(1) 物體 A 與物體 B 的加速度量值為

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

但物體 A 的加速度向下，物體 B 的加速度向上。

(2) 細繩上的張力量值為

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

想一想

阿特午機的裝置如圖 4-18 所示，繩子的一端繫有一面鏡子，而猴子攀附在繩子的另一側，剛開始時，猴子與鏡子相對靜止且猴子恰好能面對鏡子。假設猴子與鏡子的質量相等，繩子夠長且很輕，若猴子不喜歡面對鏡子，嘗試著向上或向下、等速或加速攀繩移動，則該猴子是否有可能脫離面對鏡子的窘境？

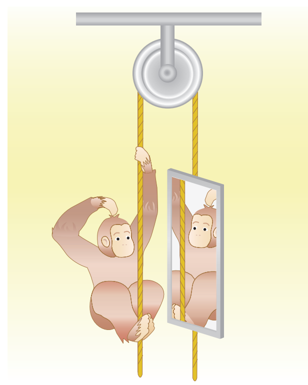


圖 4-18　猴子恰好面對鏡子。

範例 4-5

在電梯中，質量為30.0公斤的玉芬站在磅秤上測量體重，如圖4-19所示，設 $g = 9.80$ 公尺/秒^2，則於下述兩種情況中，磅秤上顯示的重量(稱為視重)為何？

(1) 若電梯為靜止。

(2) 若電梯正以加速度 $a = 0.980$ 公尺/秒^2 向上作等加速運動。

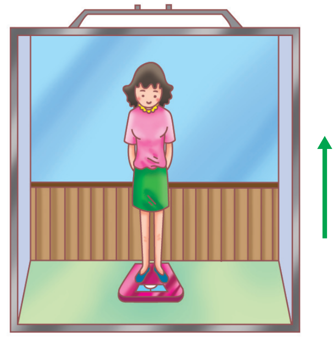


圖4-19 在電梯中量體重。

解答

(1) 玉芬共受二力作用：一為玉芬的重量 $W = mg$，其方向向下；另一為磅秤對玉芬所施的正向力 N，其方向向上，如圖4-20(a)所示。因為電梯靜止，故此二力平衡 $\Sigma F = 0$，取向上的方向為正，則其平衡條件為

$$N - mg = 0$$

磅秤對玉芬所施的正向力與玉芬對磅秤的作用力應量值相等，後者顯示為磅秤的讀數，稱為視重 W_0，故

$$\begin{aligned} W_0 &= N = mg \\ &= (30.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) \\ &= 294\ \text{N} = 30.0\ \text{kgw} \end{aligned}$$

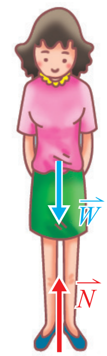


圖 4-20(a) 玉芬在靜止的電梯中。

(2) 玉芬同樣共受二力作用，如圖4-20(b)所示。因為電梯向上作等加速運動，故取向上的方向為正，則由牛頓第二定律 $\Sigma F = ma$ 可得其運動方程式為

$$N - mg = ma$$

則磅秤的讀數，即視重為

$$\begin{aligned} W_0 &= N = m(g + a) \\ &= (30.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2 + 0.980\ \text{m/s}^2) \\ &= 323\ \text{N} = 33.0\ \text{kgw} \end{aligned}$$

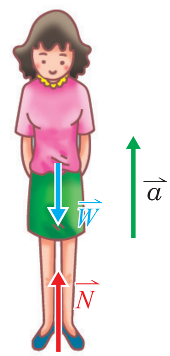


圖 4-20(b) 玉芬以加速度 $\vec{a}$ 向上作等加速運動。

上述範例的結果顯示：物體的加速度方向為朝上時，所測得的視重會比原來在地面所量得的重量增大；相反地，若物體的加速度方向為朝下時，物體的視重將減小。若電梯的鋼纜突然斷裂，則電梯將以 9.80 公尺/秒 ^{2} 的加速度向下作等加速運動時，正向力將減為零，即物體的視重為零，此時稱為**失重**（weightlessness）。

範例 4-6

車廂以等加速度 $\vec{a}$ 向右方前進時，車廂中的單擺向左方擺起，穩定地停留在與鉛垂線夾 θ 角的位置，如圖 4-21 所示。若擺錘質量為 m，重力加速度的量值為 g，則

(1) 車廂的加速度量值為何？

(2) 擺繩上的張力量值為何？

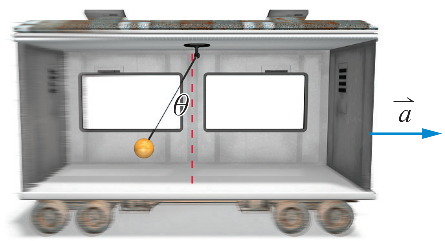


圖 4-21　加速前進的車廂內，單擺向後擺起，停留在某一角度。

解答

(1) 地面上的觀察者（靜止坐標系）看到單擺擺錘受到二個作用力：擺錘的重量 $m\vec{g}$ 及擺繩上的張力 $\vec{T}$，如圖 4-22 所示。因為此二力的合力不為零（至少二力的方向並不相反，即可判定），故能使擺錘隨車以加速度 $\vec{a}$ 前進，遵守牛頓運動定律，則

在水平方向：$\Sigma F_x = T\sin\theta = ma$　　①

在鉛直方向：$\Sigma F_y = T\cos\theta - mg = 0$　　②

解聯立方程式①式及②式，可得：

$\tan\theta = \dfrac{a}{g}$，即車廂的加速度量值為

$$a = g\tan\theta$$

(2) 繩上的張力由②式可得

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

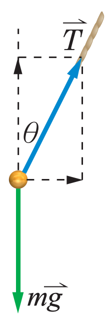
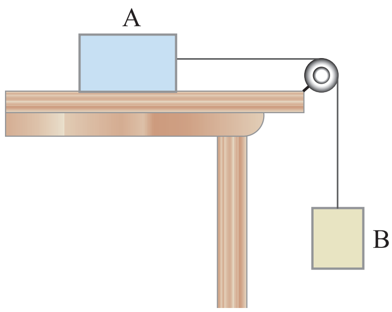


圖 4-22　擺錘受力為重量 $m\vec{g}$ 及繩上張力 $\vec{T}$。

延伸閱讀 In-depth Readings

1 自由體受力圖的作法

1. 將系統內某個物體，或幾個物體與系統內其他所接觸的周圍物體隔離。
2. 繪出並標示該物體所受的所有作用力，若有未知的作用力，則可先行假設其方向，事後推算出其值為正時，表示假設的方向正確；若推算出其值為負時，表示其方向與假設的方向相反。
3. 例如：質量為 m_1 的物體 A 與質量為 m_2 的物體 B 以質量忽略不計的細繩連結，將細繩跨在桌邊的定滑輪上，並將物體 A 置於水平桌面，物體 B 懸垂於桌邊，如圖 4-23 (a)。若物體 A 與 B 作等加速運動，則應如何分析各物體所受的作用力？



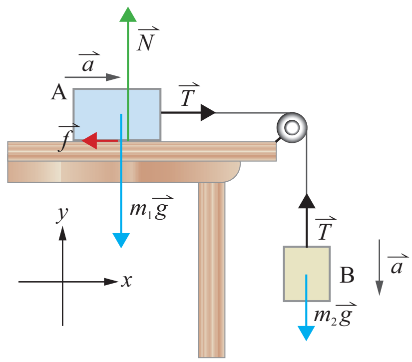


圖 4-23　(a)兩木塊以繩連結，跨在定滑輪上；(b)兩木塊所受作用力的示意圖。

(1) 將運動系統（故不需考慮水平桌面及定滑輪）內的物體 A、物體 B 及繩子上所受的所有作用力繪出並標示，如圖 4-23 (b)。

(2) 由上述的力圖不易討論整個系統的運動，也不易列出其運動方程式；故需將各物體予以隔離。

(3) 物體 A 在水平桌面上向右作等加速運動，繪出物體 A 所受的作用力，並列出其運動方程式：

因為物體 A 將向右作等加速運動，故選擇參考坐標，如圖 4-24 所示，水平向右的方向取為 x 軸，垂直於水平桌面向上的方向取為 y 軸。設細繩對物體 A 所施的張力為 $\vec{T}$，物體 A 的重力為 $m_1\vec{g}$，水平桌面對物體 A 的正向力為 $\vec{N}$，以及對物體 A 作用的摩擦力為 $\vec{f}$，物體 A 的加速度量值為 a，則依牛頓第二運動定律，列式如下：

在 x 軸方向：$\Sigma F_x = T - f = m_1 a$

在 y 軸方向：$\Sigma F_y = N - m_1 g = 0$

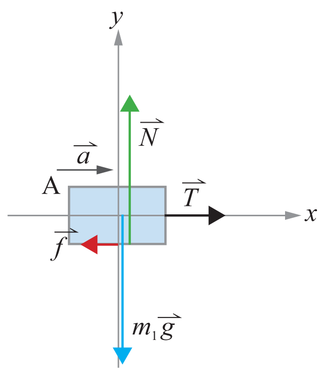


圖 4-24　物體 A 的受力圖

(4) 物體 B 在桌邊向下作等加速運動，繪出物體 B 所受的作用力，並列出其運動方程式：

因為物體 B 將向下作等加速運動，故選擇參考坐標，如圖 4-25 所示，水平向右的方向取為 x 軸，鉛直向上的方向取為 y 軸。

設細繩對物體 B 所施的張力為 $\vec{T}$，物體 B 的重力為 $m_2\vec{g}$，物體 B 的加速度量值為 a，則依牛頓第二運動定律，列式如下：

在 x 軸方向：$\Sigma F_x = 0$

在 y 軸方向：$\Sigma F_y = T - m_2 g = m_2(-a)$

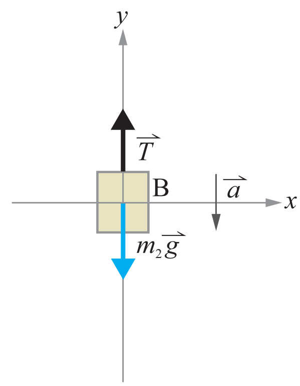


圖 4-25　物體 B 的受力圖

2 力圖繪圖要領的建議

此處要特別提醒的是：在繪圖分解二維向量時，常常會使用同樣粗細的實線繪出向量及其分量。不但當時容易混淆不清，而且以後會造成概念的迷思。

以物體置於斜面為例，物體所受的重力 $m\vec{g}$ 可以分解為平行於斜面的分力及垂直於斜面的分力。若在繪圖時，將此三力以相同的實線繪出，如圖 4-26 所示，可能導致誤以為物體受到三個作用力。

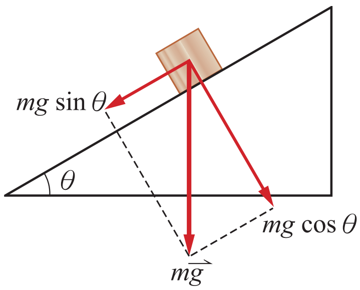


圖 4-26　不易辨識物體所受的是分力還是合力。

(1) 要避免這種混淆概念的發生，只要在繪圖時，將物體所受的作用力以實線表示，而其分力則以虛線表示即可。例如：物體受地球的重力 $m\vec{g}$ 作用，可分解為平行於斜面的分力 $mg\sin\theta$，使物體能向斜面下方滑行；及垂直於斜面的分力 $mg\cos\theta$，使物體能貼緊在斜面上，如圖 4-27 所示。

(2) 同理，在繪出合力時也可以使用相同的作法：若物體所受的作用力以實線表示，其合力則以虛線表示。例如兩力 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 的量值均為 10 牛頓，且其夾角為 60°，試求其合力 $\Sigma\vec{F}$ 時，可以繪圖如圖 4-28 所示。

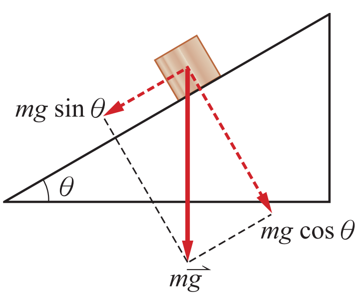


圖 4-27　繪出物體所受重力的分力。

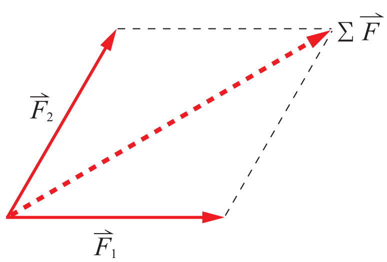


圖 4-28　求合力的繪圖

(3) 將向量分解時，到底要選擇什麼方向的分量，也就是說要選擇什麼方向的坐標軸，完全要考慮向量的分布情況以及問題的目的而定，不應刻板地墨守成規。在範例 4-2 中，施於旅行箱上的拉力分解為水平方向的分力，使旅行箱在水平方向上做等加速運動；而鉛直方向上作用力的合力為零，應遵守力的平衡。在分析斜面上的物體時，物體所受的重力分解為平行於斜面的分力，使物體沿斜面下滑；而垂直於斜面的分力則使物體貼緊斜面。

3 非慣性坐標系與假想力

觀察者在靜止或等速運動時，即在慣性坐標系中，所見物體的受力與運動現象，皆能符合牛頓第一運動定律及牛頓第二運動定律的規範。

但若觀察者在作加速度運動時，其參考坐標系則稱非慣性坐標系，假設發現牛頓定律不能成立，若仍堅持要使用牛頓第二運動定律，就必須引進一個沒有力源的**假想力**(pseudo force)，或稱為**慣性力**(inertial force)及**虛設力**(fictitious force)等。例如在範例 4-6 中所述，車廂以加速度 a 向右方等加速前進時，車廂中的單擺向左方擺起，最後可以穩定地停留在與鉛垂線夾 θ 角的位置，如圖 4-29 (a)所示。

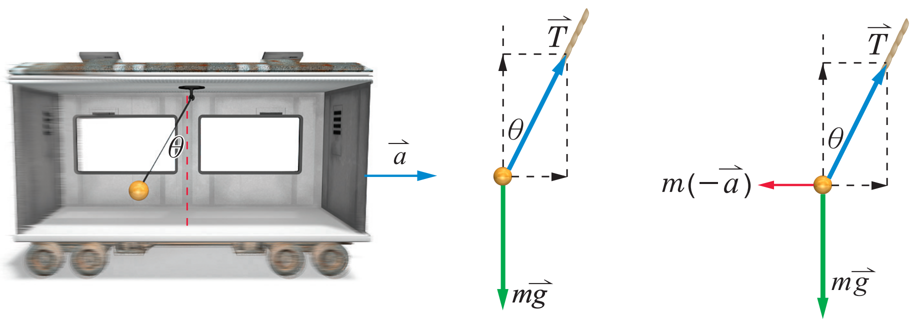


圖 4-29 (a)加速前進的車廂內，單擺向後擺起某一角度。(b)以慣性坐標系的觀點觀察到擺錘受二力作用。(c)以非慣性坐標系的觀點觀察，認為擺錘受三力作用。

若以加速度運動的車廂內觀察者的參考坐標系觀察時，也會看到單擺擺錘受到二個作用力：擺錘的重量 $m\vec{g}$ 及擺繩上的張力 $\vec{T}$，如圖 4-29 (b)所示。因為此二力的合力不為零，但擺錘相對於觀察者為靜止，顯然不能遵守牛頓運動定律。所以觀察者認為擺錘應受一向左的假想力作用，此假想力的方向應與觀察者的加速度方向相反，而其量值則為擺錘質量與觀察者加速度量值的乘積，即 $F = m(-a)$，如圖 4-29 (c)所示，此三力的合力為零，使牛頓運動定律能夠成立。

在水平方向：$\Sigma F_x = T\sin\theta - ma = 0$　　①

在鉛直方向：$\Sigma F_y = T\cos\theta - mg = 0$　　②

解聯立方程式①式及②式，可得：

$\tan\theta = \dfrac{a}{g}$

即車廂的加速度量值為 $a = g\tan\theta$，而繩上的張力由②式可得 $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$，與靜止坐標系的觀察者所得結果相同。