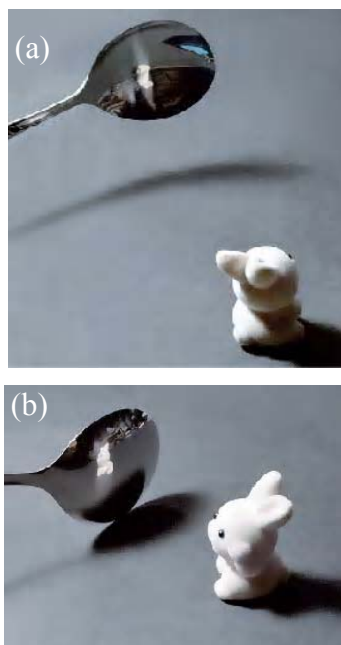


4-2 球面鏡



▲圖 4-11 (a)湯匙凹的一面常出現物體倒立較小像。(b)湯匙凸的一面出現正立的像。

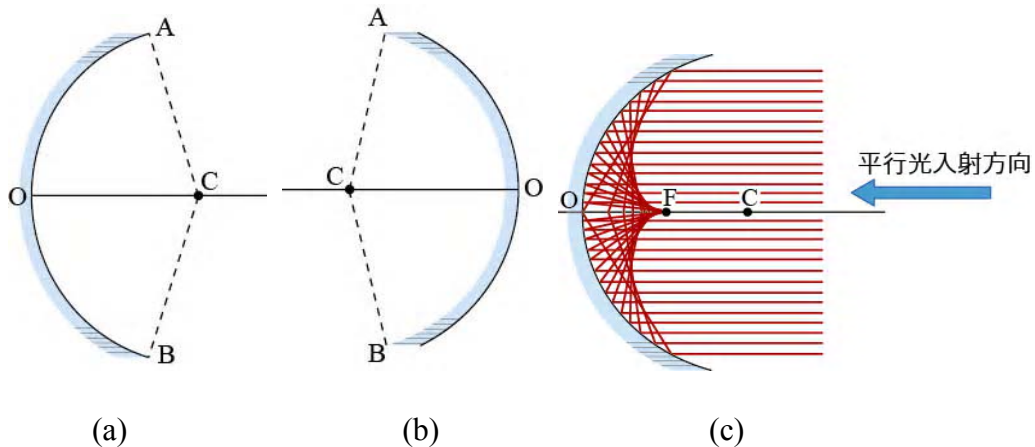
前節所述的拋物面鏡，除了收看衛星電視所用的碟形天線之外，在日常生活中不容易見到。原因是拋物面鏡製作較為困難，成本較高，日常生活中也不需要利用到嚴格的拋物面鏡。如果曲面不是拋物面，就不會有將所有平行會聚於一點的性質，那會有什麼現象呢？

有時我們去餐廳用餐，餐點尚未上桌之前，拿起湯匙把玩，發現亮晶晶的湯匙裡會呈現物體的像，湯匙凹的一面常呈現倒立較小的像，而凸的一面則出現縮小正立的像，如圖 4-11 所示。為什麼會呈現這樣的像？有無規則可循呢？

1. 球面鏡

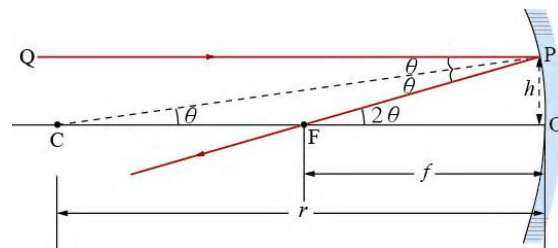
將球面的一部分作成反射面，稱為**球面鏡** (spherical mirror)。如圖 4-12(a)所示的反射面為凹面，稱為**凹面鏡** (concave mirror)；圖 4-12(b)的反射面為凸面，稱為**凸面鏡** (convex mirror)。圖中鏡面的中心點 O 稱為**鏡頂** (vertex)， C 為球面的**球心**， OC 稱為**主軸** (principal axis)， \overline{AB} 為孔徑， $\angle ACB$ 稱為孔徑角（如圖中的虛線夾角）。圖 4-12(c) 為平行於主軸的光線經凹面鏡反射的情形，圖中可以看出這些反射線不會剛好交會在同一位置，但是靠近主軸的平行光，其反射線則大致會聚於主軸上的某一點 F ，與拋物面鏡的聚光情形類似， F 稱為球面鏡的**焦點**。因此若凹面鏡的孔徑角過大，則從遠處物體發出的光線，經凹面鏡反射後所生成的像會有些模糊。為使成像清晰，必須適度縮小球面鏡

的孔徑角，使入射至鏡面的光線靠近主軸，且與主軸夾成的角度甚小，這些光線稱為**近軸光線**（paraxial ray）。以下有關球面鏡成像的討論，將僅限於近軸光線的部分。



▲圖 4-12 (a)球面凹面鏡；(b)球面凸面鏡；(c)平行且靠近主軸的入射光經凹面鏡反射後，會聚於焦點 F。

焦點 F 至鏡頂 O 的距離稱為焦距（focal distance，或常稱為 focal length），以 f 表示之。球面鏡的焦距 f 和其曲率半徑 r 之間有一簡單的數學關係。在圖 4-13 中，一平行於主軸的近軸光線 QP 入射在鏡面上的 P 點，反射後通過焦點 F。



▲圖 4-13 球面鏡的焦距 f 等於其曲率半徑 r 的一半。

設 C 點為球心，CP 垂直於通過 P 點的切面，即 CP 為法線， $\angle QPC$ 為入射角，設為 θ 。根據反射定律，其反射角 $\angle CPF$ 等於入射角 θ 。又兩平行線之間的內錯角相等，故 $\angle PCF = \theta$ 。而 $\angle PFO$ 為 $\triangle PCF$ 的外角，故 $\angle PFO = 2\theta$ 。若球面鏡的孔徑甚小於曲率半徑（即符合近軸光線的條件），則 θ 甚小，得 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ 。由圖上的幾

何關係可得 $\theta \approx \frac{h}{r}$ ， $2\theta \approx \frac{h}{r}$ ，故

$$f = \frac{1}{2}r$$

4-1 式

即球面鏡的焦距等於其曲率半徑的一半。

範例 4-1

對凹面鏡的近軸光線而言，經凹面鏡反射後，交主軸於焦點 F 處。若入射線離主軸較遠，入射至凹面鏡時的入射角為 θ ，反射後與主軸的交點位置為 G。若凹面鏡的焦距為 f ，求 G 與 F 的距離。

[解答] 由反射定律及平行線內錯角相等，可知

圖 4-14 中的三個 θ 角相等。過 G 點作 \overline{GH} 垂直圖中的虛線（虛線的長度為半徑，即 $2f$ ），由圖中很容易看出

$$\overline{CG} = \frac{f}{\cos\theta}。$$

$$\text{於是 } \overline{GF} = \overline{CG} - \overline{CF} = \frac{f}{\cos\theta} - f$$

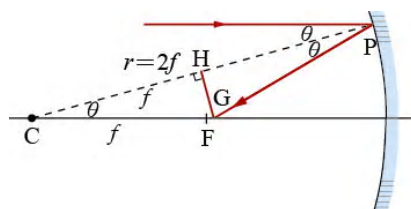
$$= f \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1 \right)$$

註：① 對於近軸光線而言， θ （以弧度為單位）甚小，此時 $\sin\theta \approx \theta$ ，因為 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \approx 1 - \theta^2$ ， θ^2 項更小，可予略去，

因此 $\cos\theta$ 非常接近於 1，而 $\frac{1}{\cos\theta}$ 較 1 大得極為有限，所以

\overline{GF} 幾乎為零，因此近軸光線的反射線交於焦點 F。

② 當面鏡的孔徑角大的時候，平行於主軸的入射線其入射角 θ 有大有小，其反射線不能會聚於一點，這會使得成像不清楚。

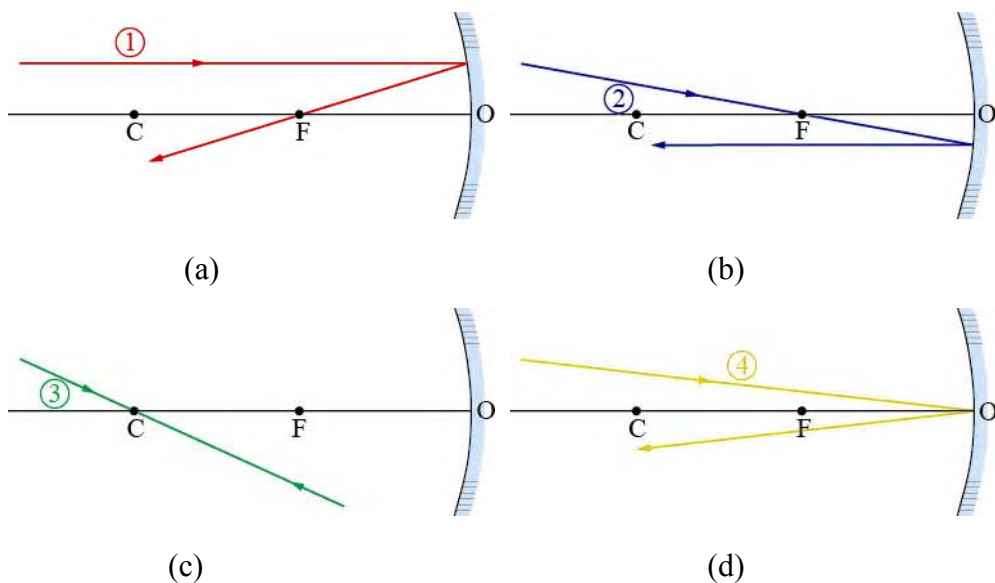


▲圖 4-14 距離主軸較遠的光線經凹面鏡反射後，與主軸的交點為 G，G 點與鏡子的距離小於焦距 f 。

2. 凹面鏡反射成像

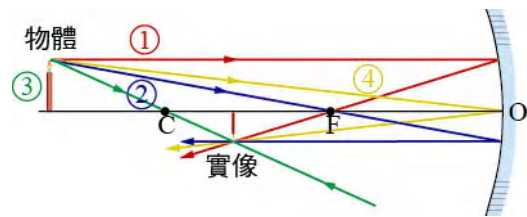
當凹面鏡的孔徑角不大時，物體發出的光線入射在凹面鏡上時，其反射線（或反射線反方向的延長線）可會聚成像。其中有四條特殊的入射線，可以利用它們的反射線來決定所成的像的位置和性質。這四條特殊光線分述如下

1. 平行於主軸的入射線，其反射線通過焦點 F ，如圖 4-15(a)中以①標示的光線。
2. 通過焦點的入射線，其反射線平行於主軸，如圖 4-15(b)中以②標示的光線。
3. 通過球心 C 的入射線，由於是沿法線方向入射，所以其反射線循入射線的反方向行進，如圖 4-15(c)中以③標示的光線。
4. 入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸，如圖 4-15(d)中以④標示的光線。



▲圖 4-15 (a)平行於主軸的入射線，其反射線通過焦點 F ；(b)通過焦點的入射線，其反射線平行於主軸；(c)通過球心 C 的入射線，其反射線循入射線的反方向行進；(d)入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸。

置於凹面鏡前物體的某一點所發出的光線中，上述四條特殊光線的路徑容易繪出。由於我們討論的光線都是近軸光線，如前所述，這些反射線或其反方向的延長線都能會聚於一點，也就是此點即為成像的位置，如圖 4-16

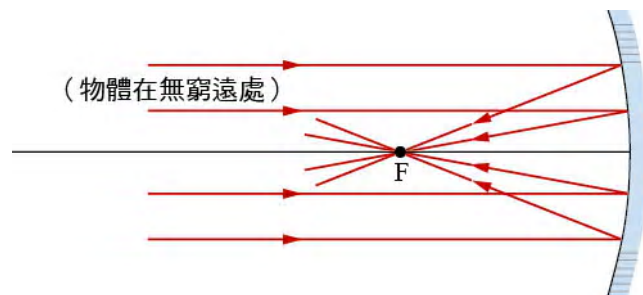


▲圖 4-16 物體經凹球面鏡反射時，可利用四條特殊光線的反射線來求像的位置和性質。這四條反射線能會聚於一點，即像的位置。

所示。因為兩線即有一交點，所以實際作圖時，通常恰當選取兩條特殊光線即可。在圖中由實際光線會聚而成的像稱為**實像** (real image)；由實際光線的反方向延長線所形成的像稱為**虛像** (virtual image)。若我們將光屏置放在成像的位置上，可以顯示出實像，但虛像則否。不過，如果我們逆著反射光線的方向觀察，可以看見實像和虛像。

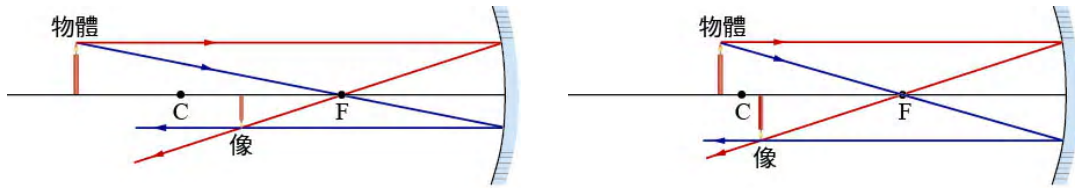
物體經凹面鏡反射所成的像，其性質（此處性質是指像的位置、大小、倒立或正立、實像或虛像等）與物體在鏡面前的位置有關。

1. 物體置於鏡前無窮遠處，若入射線平行於主軸，則成像於焦點 F 處，如圖 4-17 所示。



▲圖 4-17 物體置於凹面鏡前無窮遠處，成像於焦點。

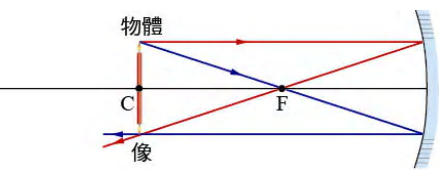
2. 物體在面鏡的球心 C 之外，形成縮小的倒立實像，其位置在球心 C 和焦點 F 之間如圖 4-18(a)所示。若物體愈接近 C 點，則像的位置也愈接近 C 點，且漸大（仍較原物體為小），如圖 4-18(b)所示。



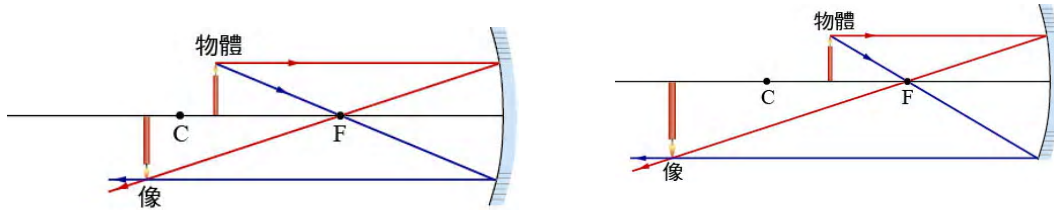
▲圖 4-18 (a)物體在凹面鏡前球心之外，會形成縮小的倒立實像，此像位於球心和焦點之間；(b)若物體的位置愈接近球心，則像也愈接近球心，且漸大（注意，所成的像雖漸大，但是仍較原物體為小）。

3. 物體恰位在面鏡的球心處，形成大小相同的倒立實像，位置就在球心處，如圖 4-19 所示。

4. 物體在球心和焦點之間，形成放大的倒立實像，其位置在球心之外，如圖 4-20(a)所示。若物體位置愈接近焦點，則所成的像愈遠且愈大，如圖 4-20(b)所示。

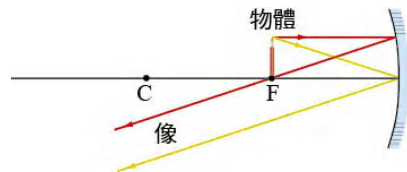


▲圖 4-19 物體位在球心處，形成一大小相同的倒立實像於球心處。



▲圖 4-20 (a)物體在球心和焦點之間，形成放大的倒立實像，位於球心外。(b)若物體的位置愈接近焦點，則所成的像愈遠且愈大。

5. 物體置於焦點上時，如圖 4-21 所示，所有的反射光線皆互相平行，成像於無窮遠處，或稱不成像。

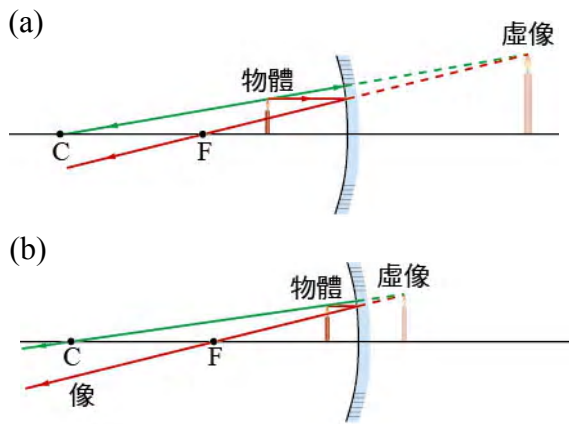


▲圖 4-21 物體置於凹面鏡的焦點處，成像於無窮遠處。

 想一想

物體置於凹面鏡前的主軸上，不論物體前後怎樣移動，所成的像不會在哪個範圍內出現？

6. 物體置於焦點和鏡面之間時，反射光線發散，無法會聚成實像。這些反射光線的反方向延長線形成一正立的放大虛像，如圖 4-22(a)所示。若物體愈接近鏡面，所成的像也愈接近鏡面，且漸小（仍較原物體為大），如圖 4-22(b)所示。

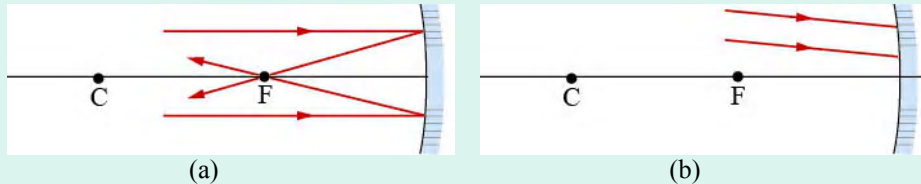


▲圖 4-22 (a)物體置於焦點和鏡面之間時，在鏡後形成一放大的正立虛像。(b)若物體的位置愈靠近鏡面，則所成的虛像也愈接近鏡面，且漸小（注意，所成的像雖漸小，但是仍較原物體為大）。



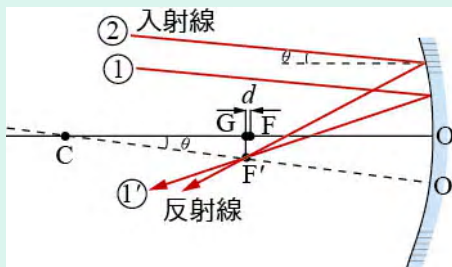
焦平面

對於孔徑角很小的凹面鏡而言，平行於主軸的近軸光線經凹面鏡反射後會聚於焦點，如圖 4-23(a)所示。而在圖 4-23(b)中，不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後能會聚於一點嗎？



▲圖 4-23 (a)平行於主軸的光線經凹面鏡反射後能會聚於焦點；(b)不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後能會聚於一點嗎？

對於這個問題，我們可以這樣思考：在圖 4-24 中，過球心 C 作平行於入射線①及②的線 CO'，CO'為①和②的「新主軸」，①和②的反射線需通過「新焦點 F'」，F'即為平行光①和②的反射線的交點。過 F' 垂直於 CO 的線交 CO 於 G 點，設 F 與 G 的距離為 d。



▲圖 4-24 不平行於面鏡主軸平行光，其反射線會聚於 F'。

$$d = \overline{FG} = \overline{CF} - \overline{CG}$$

$$= f - f \cos \theta$$

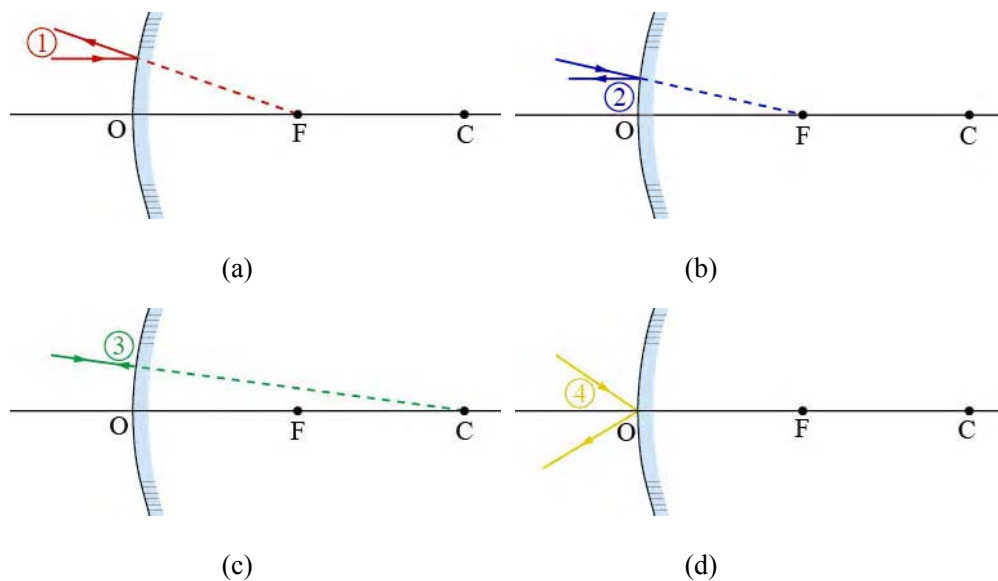
$$= f(1 - \cos \theta)$$

對近軸光線而言， θ 甚小， $\cos \theta \approx 1$ ，即 $d \approx 0$ ，所以 F' 可視為位於過 F 而垂直於主軸的平面上。因此，不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後可會聚於一點，而此點在通過焦點而垂直於主軸的平面上，此平面稱為焦平面。

3. 凸面鏡反射成像

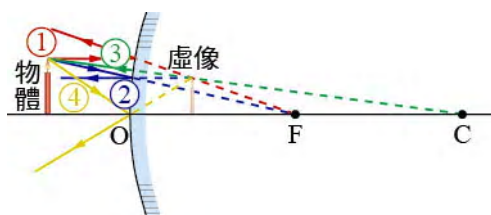
置於孔徑角不大的凸面鏡前之物體，發出的光線入射在面鏡上時經反射（或反射光反方向的延長線）可會聚成像。與凹面鏡相似，也有四條特殊的入射線，可以利用它們的反射線來決定所成的像的位置和性質。這四條特殊光線分述如下：

1. 平行於主軸的入射線，其反射線的反方向延長線通過焦點 F ，如圖 4-25(a)中以①標示的光線。
2. 指向焦點的入射線（即入射線的延長線通過焦點者），反射後平行於主軸，如圖 4-25(b)中以②標示的光線。
3. 指向球心 C 的光線，其反射線循入射線的反方向行進，如圖中 4-25(c)以③標示的光線。
4. 入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸，如圖 4-25(d)中以④標示的光線。



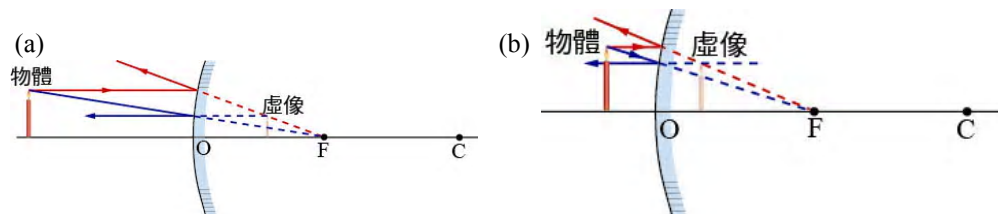
▲圖 4-25 (a)平行於主軸的入射光線，其反射光線的反方向延長線通過焦點 F ，如圖中以①標示的光線；(b)指向焦點的入射線（即入射線的延長線通過焦點者），反射後平行於主軸，如圖中以②標示的光線；(c)指向球心 C 的光線，其反射光線循入射線的反方向行進，如圖中以③標示的光線；(d)入射於鏡頂 O 的光線，其反射光線對稱於主軸，如圖中以④標示的光線。

若這四條入射線是從同一點發出，則其反射線在反方向的延長線會交於一點。因為不是實際光線的會聚，故為虛像，如圖 4-26 所示。與凹面鏡成像類似，實際作圖時，通常恰當選取兩條特殊光線即可。



▲圖 4-26 物體經凸球面鏡反射時，利用四條特殊光線的反射線來求像的位置和性質。注意在凸面鏡成像時，反射線是發散的，其反方向的延長線才能交於一點。

凸面鏡對於鏡前的物體，僅能在鏡後的焦點內形成縮小的正立虛像，如圖 4-27(a)所示，若物體愈接近鏡面，則成像位置也愈接近鏡面，且漸大（仍較原物體為小），如圖 4-27(b)所示。



▲圖 4-27 (a)物體置於凸面鏡前，在鏡後焦點內形成縮小的正立虛像。(b)物體愈接近鏡面，成像位置也愈接近鏡面，且漸大（注意，所成的像雖漸大，但是仍較原物體為小）。



想一想

1. 物體由單一面鏡反射成的像，其性質有倒立或正立；有放大或縮小；有實像或虛像；有的在鏡前，有的在鏡後。若是成實像，一定是倒立嗎？一定在鏡後嗎？一定是放大嗎？
2. 上一問題中，若是成虛像，一定是正立嗎？一定在鏡後嗎？一定是縮小嗎？

範例 4-2

圖 4-11(a)和(b)兩圖中，兔娃娃經面鏡所成的像各在什麼地方？

[解答] 圖 4-11(a)中的兔娃娃呈現倒立縮小的像，這是實像，像的位置在鏡前球心到焦距之間。圖 4-11(b)中的兔娃娃呈現正立縮小的像，這是虛像，像的位置在鏡後。

4. 面鏡成像公式

前面所討論物體經凹面鏡及凸面鏡反射成像的情形，其實可歸納為一公式。若物體與面鏡的距離為 p ，稱為**物距**（object distance）；像與面鏡的距離為 q ，稱為**像距**（image distance）；面鏡的焦距為 f 。這三者之間有以下的關係

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

4-2 式

上式中，物距 p 為正值；成實像時， q 取正值，成虛像時， q 取負值；凹面鏡的焦距 f 取正值，而凸面鏡的焦距 f 取負值。或者說，利用此公式算出的像距為正的時候，則所成的像為實像；算出的像距為負的時候，則所成的像為虛像。而算出的焦距為正的時候，表示此面鏡為凹面鏡；算出的焦距為負的時候，表示此面鏡為凸面鏡。（此公式的推導參考 P.174 延伸閱讀）

若物體的高度為 h_o ，像的高度為

h_i ，則像的放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o}$ 。物體

或所成的像在主軸上方時，其高度 h_o

或 h_i 取正值；反之，在主軸下方時，

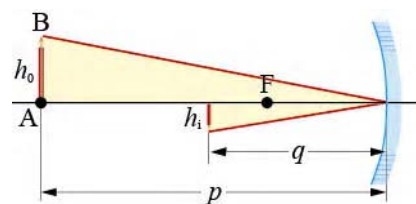
其高度 h_o 或 h_i ，取負值。在圖 4-28 的成像圖中，兩著色三角形相似，可

得 $\frac{-h_i}{h_o} = \frac{q}{p}$ 。即放大率也可寫為

$$M = \frac{q}{p}$$

4-3 式

放大率為正時，表示成正立虛像；放大率為負時，則為倒立實像。又， $|M| > 1$ 時，表示為放大的像； $|M| < 1$ 時，則為縮小的像。



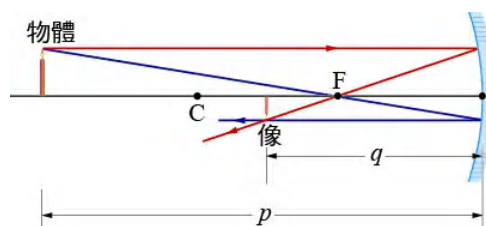
▲圖 4-28 放大率為像距與物距的比值。

範例 4-3

一物體長 2.0 cm，置於焦距為 5.0 cm 的凹面鏡前 15.0 cm 處，試回答下列各題：

- (1) 作圖決定成像的位置。
- (2) 利用面鏡公式，計算像的位置和像長。
- (3) 若將凹面鏡改為凸面鏡，重答以上兩題。

[解答] (1) 選用兩條主要的入射光線，即可作圖得出像的位置，如圖 4-29 所示，所成的像為縮小的倒立實像。



▲圖 4-29 以作圖決定成像的位置

- (2) 利用面鏡公式 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ，

$$\text{得 } \frac{1}{15.0 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5.0 \text{ cm}}$$

解得 $q = 7.5 \text{ cm}$ 。因為像距為正，表示為一實像，位於鏡前 7.5 cm 處。放大率為

$$M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p} = -\frac{7.0 \text{ cm}}{15.0 \text{ cm}} = -\frac{1}{2.0}，$$

故像長為

$$h_i = -\frac{1}{2.0} \times 2.0 \text{ cm} = -1.0 \text{ cm}，$$

負號表示為倒立的實像。

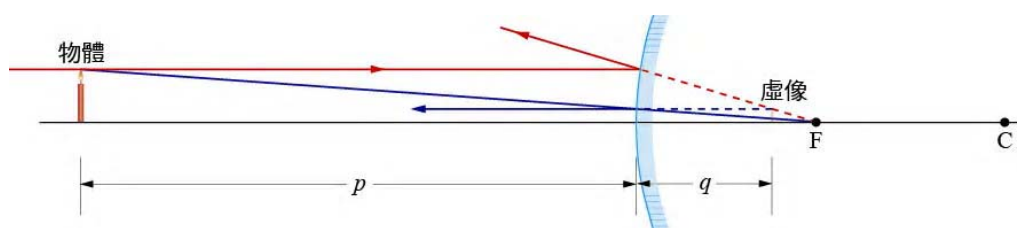
- (3) 若改為凸面鏡，則在鏡後生成一縮小的正立虛像，如圖 4-30 所示。利用面鏡公式，得

$$\frac{1}{15.0 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-5.0 \text{ cm}}$$

解得 $q = -3.75 \text{ cm}$ 。因為像距為負，表示成為一虛像，位於鏡後

3.75 cm 處。放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p} = -\frac{-3.75 \text{ cm}}{15.0 \text{ cm}} = \frac{1}{4.0}$ ，

故像長為 $h_i = \frac{1}{4.0} \times 2.0 \text{ cm} = 0.50 \text{ cm}$ ，為正立的虛像。



▲圖 4-30 以作圖法決定成像的位置。

範例 4-4

月球和地球之間的距離為 $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ ，月球的直徑為 $3.48 \times 10^6 \text{ m}$ ，若以焦距為 0.90 m 的凹面鏡觀測月球，則所生成的像的直徑是多少？

[解答] 由在地球上以凹面鏡觀測月球，月球與地球之間的距離即為物距 p ，由面鏡公式得

$$\frac{1}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{0.90 \text{ m}} \quad \text{得} \quad q \approx f = 0.90 \text{ m}$$

此為實像。又設 h 和 h' 分別為月球和其成像的直徑，由放大率

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \approx -\frac{f}{p} \quad \text{可知月球成像的直徑與凹面鏡的焦距成正比，可}$$

得像的直徑

$$h' = \frac{0.90 \text{ m}}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} \times (3.48 \times 10^6 \text{ m}) = -0.0082 \text{ m} = -0.82 \text{ cm}$$

負號表示倒立的像。

所成像的大小顯然較原來月球的直徑小多了，但是對觀察者來說視角放大了，而且通常會再利用透鏡將此像放大，以便觀察。

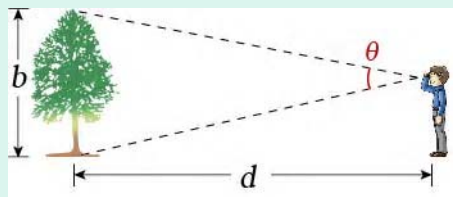


視角放大.....

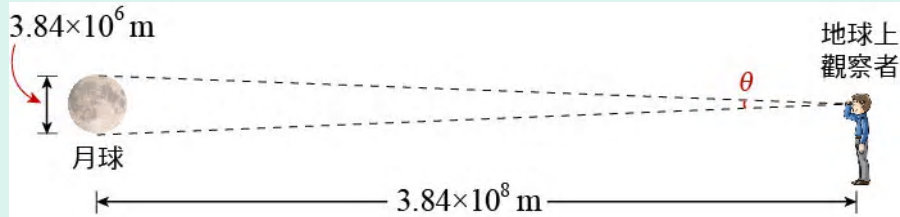
在範例 4-4 中，月球經凹面鏡所成的像較原來月球的大小小多了，是縮小的像。但是我們看到的像卻比原來的月球清楚多了，為什麼呢？原來這是視角放大。

在圖 4-31(a)中，物體（或像）的上下緣至觀察者的視線所夾的角度 θ 稱為視角，即 $\theta \approx \frac{b}{d}$ 。圖 4-31(b)中，地球上的觀察者直接看月球時（未按比例繪圖），月球對人的視角 θ 約為 0.51° ，而圖 4-31(c)，月球經凹面鏡成像後，若觀察者與像的距離為 20 cm，則視角 θ' 為 2.3° 。由於視角放大了，所以會看得較清楚。

(a)



(b)



(c)



▲圖 4-31 (a)物體（或像）的上下緣至觀察者的視線所成的角 θ ，稱為視角；(b)視角 θ 約 0.51° （未按比例作圖）；(c)人看像的視角 θ' 為 2.3° （未按比例作圖）。

有些化妝用的鏡子係利用焦距較長的凹面鏡做成，使用時臉的位置在面鏡的焦點以內，因此產生正立的放大虛像，方便化妝，如圖 4-32 所示。汽車大燈、手電筒或照相機閃光燈也常利用凹面鏡作為反射面，使經凹面鏡反射後射出的光線較為集中。圖 4-33 所示則為耳鼻喉科醫師看診時常配戴凹面反射鏡，可聚光於耳內，方便觀察。

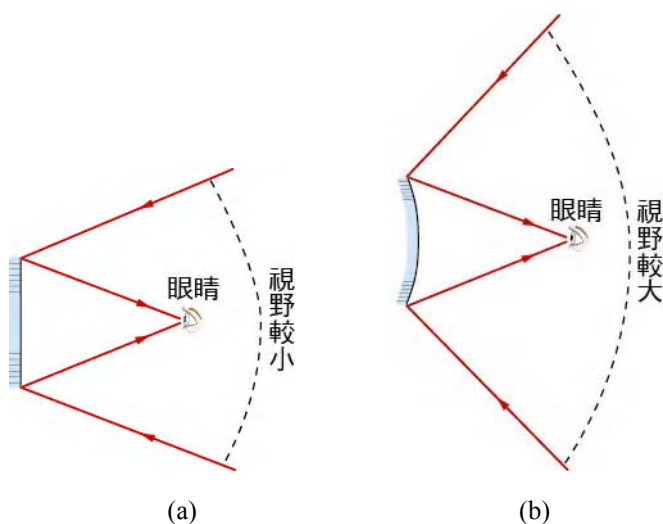


▲圖 4-32 有些化妝鏡用凹面鏡製成，以便化妝。



▲圖 4-33 耳鼻喉科醫師配戴凹面反射鏡看診。

馬路或巷口轉彎處常常安裝有凸面鏡，以便觀察到更大的範圍，看到對方是否有來車。汽車上的後視鏡也常用凸面鏡也是有利於看到後方更大的範圍，以策安全。由圖 4-34 可以看出經由凸面鏡的反射，可看到的視野較平面鏡為大。



▲圖 4-34 利用凸面鏡反射看到的視野較平面鏡者為大。

延伸閱讀

In-depth Readings

面鏡的成像公式

設物體高度為 h_0 ，像的高度為 h_i （像為倒立時， h_i 取負值）

- (1) 凹面鏡成實像的情況：

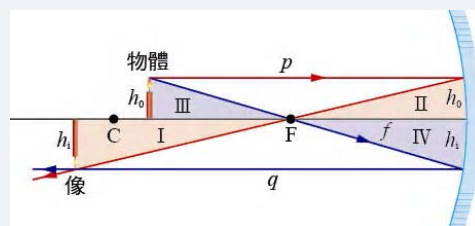
由圖 4-35 中 I 和 II 兩三角形相似得

$$\frac{-h_i}{h_0} = \frac{q-f}{f} \quad \text{①}$$

又兩三角形 III 和 IV 相似，得

$$\frac{-h_i}{h_0} = \frac{f}{p-f} \quad \text{②}$$

①和②得： $\frac{q-f}{f} = \frac{f}{p-f}$ 化簡得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ③



▲圖 4-35

- (2) 凹面鏡成虛像的情況：

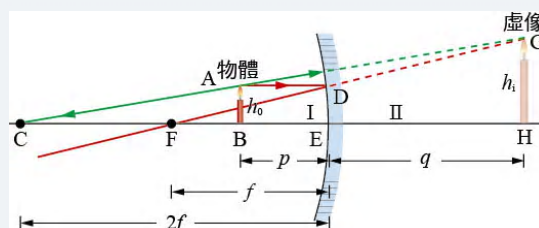
圖 4-36 中 $\triangle FGH$ 與 $\triangle FDE$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{q+f}{f} \quad \text{④}$$

又 $\triangle CGH$ 與 $\triangle CAB$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{q+2f}{2f-p} \quad \text{⑤}$$

④和⑤兩式得 $\frac{q+f}{f} = \frac{q+2f}{2f-p}$ 化簡得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{f}$ ⑥



▲圖 4-36

- (3) 凸面鏡成虛像的情況：

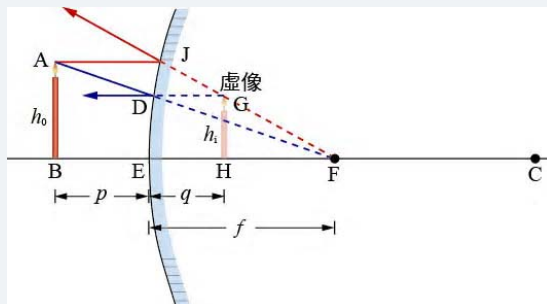
圖 4-37 中 $\triangle FDE$ 與 $\triangle FAB$ 相似，得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{f}{f+p} \quad \text{⑦}$$

又 $\triangle FGH$ 與 $\triangle FJE$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{f-q}{f} \quad \text{⑧}$$

⑦和⑧兩式得 $\frac{f}{f+p} = \frac{f-q}{f}$



化簡得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{-f}$ ③

▲圖 4-37

①和②和③三式可統一寫為 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ④

只要令成虛像時，像距 q 取負值，凸面鏡的焦距 f 取負值即可。