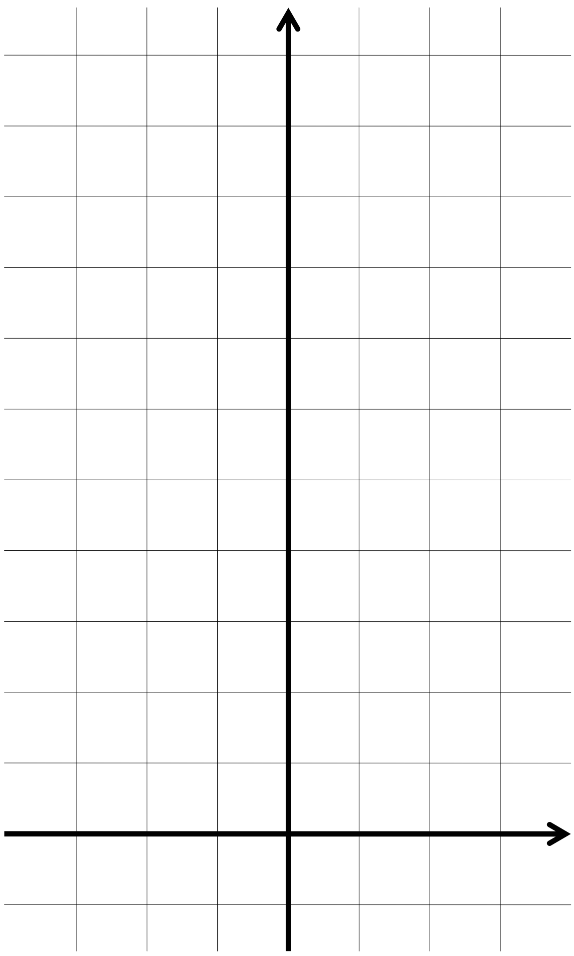
§ 3-2 指數函數

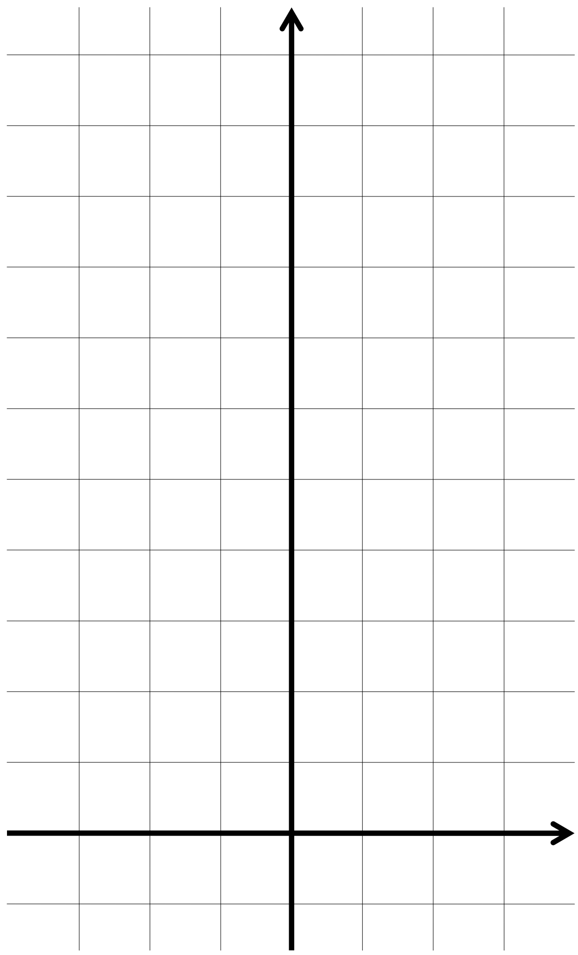
一、 指數函數的定義

設 $a>0$，$a\neq 1$，x 是任意實數，則 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數。

例： 在同一坐標平面上，試畫出下列指數函數的圖形：

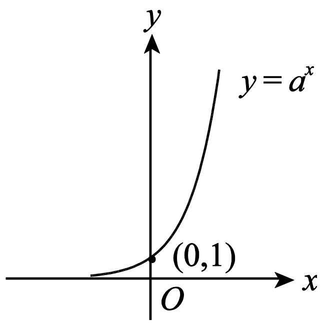
(1) $y=2^x$ 與 $y=3^x$　　　　(2) $y=(\frac{1}{2})^x$ 與 $y=(\frac{1}{3})^x$



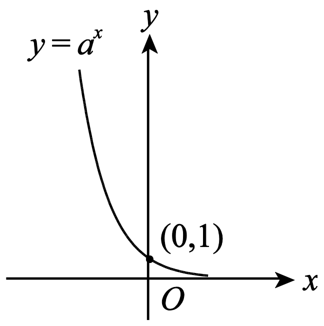


二、指數函數的圖形

指數函數 $y=a^x$ 在 $a>1$ 與 $0<a<1$ 時的圖形如下：



$a>1$



$0<a<1$

1.指數函數圖形的特性：

(1) $y=a^x$ 之圖形恆在 x 軸上方，即對任意的實數 x， $a^x>0$ 恆成立。

　因此，指數函數的**定義域**為**任意實數**，**值域**為所有**正實數**。

(2) 圖形必通過定點(0, 1)，即 $a^0=1$ 恆成立。

(3) x 軸上方的任一水平線都與曲線 $y=a^x$ 有唯一交點，即 $y=a^x$ 為 1-1 之函數。

(4)當 $a>1$ 時，曲線由左而右上升(嚴格遞增)，即 $a^{x_1}>a^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2$

當 $0<a<1$ 時，曲線由左而右下降(嚴格遞減)，即 $a^{x_1}>a^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$

(5)圖形上任相異兩點的連線段必在函數圖形的上方(表示函數圖形凹口向上)，

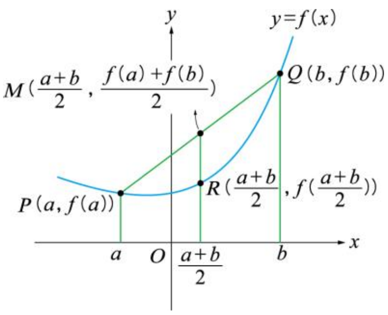
且漸近線為 x 軸。

註：**函數圖形的凹向性**

(1)若函數 $f(x)$ 的圖形是**凹向上**

$\Rightarrow$對任意 $a<b$，滿足 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}>f(\dfrac{a+b}{2})$

(即圖形上任兩點的連線段必在 $f(x)$ 函數圖形上方)



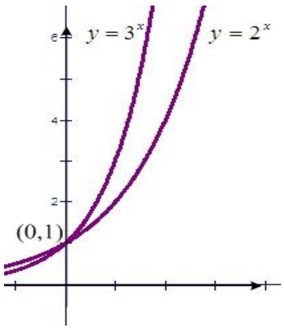
(2)若函數 $f(x)$ 的圖形是**凹向下**

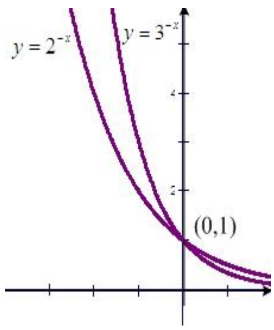
$\Rightarrow$ 對任意 $a<b$，滿足 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<f(\dfrac{a+b}{2})$

(即圖形上任兩點的連線段必在 $f(x)$ 函數圖形下方)

2. $y=a^x$ 與 $y=b^x$ 圖形之比較

$a>b$ 時，　$x>0 \Leftrightarrow a^x>b^x$　　　　$x<0 \Leftrightarrow a^x<b^x$





3.函數 $y=a^x$ 與 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$（$=a^{-x}$）圖形對稱於 y 軸

$y=f(x)=a^x$ 的對稱圖形：

(1)對稱於 y 軸____________

(2)對稱於 x 軸____________

(3)對稱於原點____________

例 1.已知右圖中是 $y=(\sqrt{2})^x$，$y=2^{-x}$，$y=3^x$，$y=3^{-\frac{x}{2}}$，四個函數的部分圖形，請判別 $A, B, C, D,$ 之圖形分別為何？