

重點 1 指數

1、指數與底數數系對應：

指數的擴張：正整數 → 整數 → 有理數 → 實數。

底數限制：_____ → _____ → _____ → _____

配合指數律：

$$(1) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) a^n b^n = (ab)^n$$

2、有理數指數與乘法公式的應用：

二次式的應用	三次式的應用
$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$	$a^3 + b^3 =$
$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^3 - b^3 =$
	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

3、常用觀察法

$$(1) (2^x)^2 = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$$

$$(2) a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 + 2$$

$$(3) a^2 + a^{-2} = (a^1 + a^{-1})^2 - 2 = (a^1 - a^{-1})^2 + 2$$

練習：例題 1、3

重點 2 指數函數及其圖形

1、設 $a > 0, a \neq 1$ ， x 為任意時數，則稱 $f(x) = a^x$ 為以 a 為底的指數函數。

2、若 $f(x)$ 為一指數函數，則：

(1) $f(m+n) = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $f(m-n) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $f(mn) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

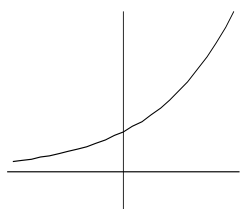
3、生活中指數函數應用

半衰期

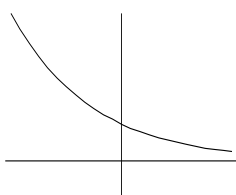
生長週期

複利計算

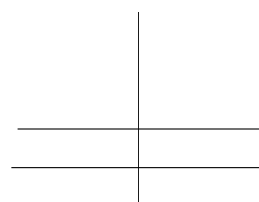
4、指數函數 $y = f(x) = a^x$ ，圖形結論如下



(1) $a > 1$



(2) $0 < a < 1$



(3) $a = 1$

一般而言，僅討論 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 的情形，故分為(1) $a > 1$ (2) $0 < a < 1$ 討論之。

$y = f(x) = a^x$ 的函數圖形皆通過點 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，圖形皆在 x 軸上方，漸近線為 $\underline{\hspace{2cm}}$

練習：例題 2、4、5

重點3 指數函數圖形特性

1、設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，指數函數 $y = a^x$ 的圖形：

觀察其增減性

(1)不同底數時：

(2)同底數時：

觀察其凹凸向性：

琴生(Jensen)不等式

2、圖形平移與方程式關係

$y = f(x) = a^x$ ，經向右平移 m 向上平移 k ，則新函數 $g(x)$ 為_____

且必過_____，漸近線為_____

3、對稱性：

$y = a^x$ 之圖形與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 圖形 關係

$y = a^x$ 之圖形與 $y = -a^x$ 圖形 關係

練習：試比較下列各數大小 $A = 3.1^{\sqrt{2}}$, $B = 3.1^{\sqrt{3}}$, $C = 3.1^{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$, $D = 3.1^{\sqrt[4]{6}}$

重點 4 對數

1、 $2^x = 5$ 時， x 有解嗎？ 估計 x 在那兩個整數間，並判斷 x 為有理數嗎？

2、定義：

$$a^x = b \text{ 時， } x = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{限制：} \quad \quad \quad)$$

3、利用指數律導出對數的運算性質

$$(1) \log_a rs = \log_a r + \log_a s \quad . \quad (\text{真數相乘等於對數相加})$$

$$(2) \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s \quad . \quad (\text{真數相除等於對數相減})$$

$$(3) \log_a r^t = t \log_a r \quad , \quad t \text{ 是任意實數} \quad . \quad (\text{乘方的對數化成對數的倍數})$$

4、運算應用

(1) 換底公式： a 與 b 都是異於1的正實數， x 是任意正數

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \quad \quad \text{推廣：} \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$(2) \text{連鎖律：} \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad \quad \quad \text{推廣：} \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$(3) \text{底真互換：} a, b, c \text{ 為三正數，且 } c \neq 1 \text{，則：} a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

練習：例題 6、7

重點 5 對數函數及其圖形

1、 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $y = f(x) = \log_a x$ 為以 a 為底的對數函數存在關係

$$(1) f(mn) = f(m) + f(n)$$

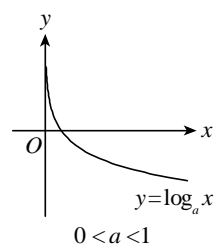
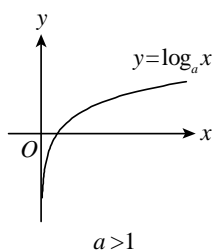
$$(2) f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$$

2、生活中指數函數應用

(1) 分貝

(2) 地震規模、強度與能量

3、對數函數 $y = \log_a x$ 在 $a > 1$ 與 $0 < a < 1$ 時的圖形如下：



$y = \log_a x$ 的圖形皆過點_____，整個圖形在 y 軸右側，且_____為其漸近線

4、 $y = a^x$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形恆對稱於 $x = y$ 。

$$\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases} \text{ 可能有 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 解}$$

練習：例題 12

重點 6 對數函數圖形特性

1、 設 $a > 0$, $a \neq 1$, 對數函數 $y = f(x) = \log_a x$ 的圖形：

觀察其增減性

(1)不同底數時：

(2)同底數時：

觀察其凹凸向性：

琴生(Jensen)不等式

2、 $y = f(x) = \log_a x$ 的函數圖形，經過向右平移 m 向上平移 k ，
則函數 $g(x)$ 為_____，必過 $(m+1, k)$ 且漸近線為_____。

3、 對稱性：

$y = \log_a x$ 之圖形與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 圖形 關係

練習：例題 8、9、10

重點 7 查表與首尾數應用

1、查表的應用

(1)查表 $\log 1.21$

(2)倒推 $\log x = 0.1206$

(3)內插 $\log x = 0.1275$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

2、科學記號與首尾數關係：

$$a = m \times 10^n \quad a \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m < 10$$

科學記號中 m 決定了 a 的_____， n 決定了 a 的_____。

所以在首數決定了_____，而尾數決定了_____。

3、單利：本金 P 元，期利率 $r\%$ ， n 期本利和_____

複利：本金 P 元，期利率 $r\%$ ， n 期本利和_____

練習：例題 11、13