

§ 3-3-1 條件機率

【討論】

1. 一位小姐有二隻鸚鵡，一天家裡來了一位客人。

客人問：“有公的鸚鵡嗎？”

小姐答：“對，有公的鸚鵡”

客人說：“這二隻鸚鵡都是公的機率應該是 $\frac{1}{3}$ ”

客人又問：“綠色的那隻鸚鵡是公的嗎？”

小姐答：“對”

客人說：“現在這二隻鸚鵡都是公的機率提高為 $\frac{1}{2}$ ”

-----你覺得客人說的對嗎？為什麼一提到綠鸚鵡是不是公的就改變了機率呢？

2. 面對一有五個選項之單選題時，甲學生對此五個選項皆覺丈二金剛摸不著後腦杓，乙學生則知第二及第四選項非正解，已先將此二個淘汰，其餘剩下的作考慮。問兩人答對的機率一樣大嗎？

3. 擲二公正骰子時，有一賭客他所下注的是至少有一出現 4 點之事件。當莊家丟完後，在不讓賭客們同時看見的情形下，莊家看了點數後告知出現點數和為偶數。聽聞此訊息，那位下注賭客應該暗自竊喜或如何？

4. 擲一粒均勻骰子，其中有一事件 $D = \{2,3\}$ ，在已知出現偶數點的情況下，事件 D 的發生機率是否有所改變？

一、條件機率

前面算機率時，我們的分母永遠是 $n(S)$ ，意即我們是面對全體可能在做機率考量；但生活中的機率並非僅為如此，一事件 A 發生的機率常因另一事件 B 的發生而改變，這種情況稱為事件 A 的條件機率。

1. 條件機率的定義：

設 A 與 B 為樣本空間 S 中的兩事件，且設 $P(A) > 0$ ，在「事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率」記做 $P(B|A)$ ，且 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 。

※ 條件機率可看成「將事件 A 視為新的樣本空間」。

2. 條件機率的性質：

設 A, B, C 是樣本空間 S 的三事件，且 $P(A) > 0$ 。則

$$(1) P(\phi|A) = 0 \qquad (2) P(A|A) = 1$$

$$(3) \text{若 } B \subset C, \text{ 則 } P(B|A) \leq P(C|A)$$

$$(4) 0 \leq P(B|A) \leq 1$$

$$(5) P(B'|A) = 1 - P(B|A), \text{ 其中 } B' \text{ 表示 } B \text{ 的餘事件}$$

$$(6) P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$$

例 1.擲兩粒公正骰子，試求

- (1) 在點數和為 8 的條件下，至少有一骰子出現 5 點的機率
- (2) 在至少有一骰子出現 5 點的條件下，點數和為 8 的機率

例 2.(1) 小明班上抽考英文與數學兩科，英文及格的有 $\frac{3}{4}$ ，數學及格的有 $\frac{2}{5}$ ，而

英文或數學至少有一科及格的有 $\frac{4}{5}$ 。

- (a)若小明英文及格時，求其數學也及格的機率。
- (b)若小明數學及格時，求其英文也及格的機率。
- (c)若小明英文不及格時，求其數學也不及格的機率。
- (d)求小明兩科都不及格的機率

(2)設 A,B 為二事件，若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ，求

(i) $P(A \cup B)$

(ii) $P(B | A)$

(iii) $P(A' | B)$

(iv) $P(A' | B')$

(v) $P(A' | (A \cap B)')$