

Youtube 標題：【吳銘數學】128-高二數學(下)|矩陣—線性變換中面積變化 | 20160531 二恭。

授課教師：吳銘祥老師

影片內容：高二數學(下) 矩陣—線性變換中面積變化

課堂實境：20160531 二恭

發佈日期：2016 年 5 月 31 日

課堂講義：

影片長度：12 min

影片網址：<https://youtu.be/N-g-bxgaY-4>

吳銘祥老師數學教室：<http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/>.....

## 丙、線性變換的面積比

### \* 線性變換的面積比公式

在坐標平面上，設  $\triangle ABC$  經線性變換  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  後成  $\triangle A'B'C'$  .

若  $\triangle ABC$  的面積為  $\Delta$ ， $\triangle A'B'C'$  的面積為  $\Delta'$ ，則

$$\Delta' = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta$$

\* 我們利用線性變換的面積比公式，分別來計算坐標平面上的一個三角形經旋轉，鏡射，伸縮或推移變換後，所得新三角形的面積  $\Delta'$  與原三角形的面積  $\Delta$  的關係：

(1) 旋轉：因為  $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，所以  $\Delta' = \Delta$ ，即三角形經旋轉變換後面積保持不變。

(2) 鏡射：因為  $\begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix} = -\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = -1$ ，所以  $\Delta' = |-1| \cdot \Delta = \Delta$ ，即三角形經鏡射變換後面積保持不變。

(3)伸縮：因為  $\begin{vmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = hk$ ，所以  $\Delta' = |hk| \cdot \Delta$ ，即三角形以原點  $O$  為中心，沿著  $x$  軸方向伸縮  $h$  ( $h > 0$ ) 倍，沿著  $y$  軸方向伸縮  $k$  ( $k > 0$ ) 倍後面積為原來的  $hk$  倍。

(4)推移：因為  $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ，所以  $\Delta' = \Delta$ ，即三角形經推移變換後面積保持不變。

範例1.

坐標平面上，已知  $\triangle OAB$  的三頂點分別為  $O(0,0)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

若  $\triangle OAB$  經線性變換  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  後成  $\triangle O'A'B'$ 。

試證： $\triangle O'A'B'$  的面積  $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \triangle OAB$  的面積

類題 1

(1) 已知  $A(1,-1)$ ， $B(2,3)$ ， $C(-1,2)$  為  $\triangle ABC$  的三個頂點，及二階方陣

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 。若  $\triangle ABC$  經過  $M$  作線性變換後對應為  $\triangle A'B'C'$ ，求  $\triangle A'B'C'$  的面積。

(2) 已知正方形  $OABC$  的面積為 1，將此正方形的各個頂點沿  $x$  軸方向推移  $y$  坐標的 3 倍，分別得  $O'$ ， $A'$ ， $B'$ ， $C'$ 。求四邊形  $O'A'B'C'$  的面積。