四、實數指數

1. 有理數指數 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

2. 對於無理指數，則用逼近法求得 a^x 的值

例如：$10^{\sqrt{2}}$ ，因為 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$，取兩個有理數列 a_n , b_n

$<a_n>$：$<1, 1.4, 1.41, 1, 414, 1.4142, \cdots>$
$<b_n>$：$<2, 1.5, 1.42, 1, 415, 1.4143, \cdots>$
使 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots<\sqrt{2}<\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1$
且 a_n, b_n 的值都會愈來愈接近 $\sqrt{2}$ ，而

$$10=10^1<10^{\sqrt{2}}<10^2=100$$
$$25.1188\cdots=10^{1.4}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.5}=31.6227\cdots$$
$$25.7039\cdots=10^{1.41}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.42}=26.3026\cdots$$
$$25.9417\cdots=10^{1.414}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.415}=26.0015\cdots$$
$$25.9537\cdots=10^{1.4142}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.4143}=25.9597\cdots$$

以此類推，可以得到 $10^{\sqrt{2}}=25.95\cdots$，且

$$10^{a_1}\le 10^{a_2}\le\cdots\le 10^{a_n}<10^{\sqrt{2}}<\cdots\le 10^{b_n}\le\cdots\le 10^{b_2}\le 10^{b_1}$$

由此可知 $10^{\sqrt{2}}$ 是有意義的，所以我們也可以定義出實數的指數運算定律．

$\therefore a>0$, $a\in R$， $f(x)=a^x$ $\forall$ $x\in R$ 皆有定義

3.實數指數律:a，b 為**正實數**，m，$n\in R$，

(1)$a^m a^n = a^{m+n}$ [$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$] (2)$(a^m)^n=a^{mn}$ (3)$a^m b^m=(ab)^m$

例 4.計算下列各式的值

(1) $(9^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$. (2) $3\cdot(\sqrt{2})^{\pi}\cdot(\sqrt{2})^{-\pi}$ (3) $\dfrac{36^{\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{12}}}$

(2) 設 $2^x=a$ ，請以 a 表示：

① $2^{2x}=$ ____， $4^x=$ ____， $2^{\frac{x}{2}}=$ ____， $2^{-x}=$ ____

② 求值 $8^{x-1}+4^{2x-3}$