

三、有理數指數

1. 定義： $a \in R, a > 0, n \in N$ ，(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (2) $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \underline{\hspace{2cm}}$ (所以只需定義 $a^{\frac{1}{n}}$)

2. 定理：(1) $a > 0, x^n = a$ 恰有一正實根，此根為 a 之正 n 次方根

(2) $a < 0, x^n = a$ 未必有實根

理由：

3. 根式運算法則：設 $a > 0, b > 0, n, p \in N, m \in Z$ ，則

$$(1) \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad (2) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad (3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (5) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

4. 有理數指數的指數律：設 $a > 0, b > 0, r, s \in Q$ ，則

$$(1) a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (2) (a^r)^s = a^{rs} \quad (3) (ab)^r = a^r b^r$$

例 2. 化簡下列各式

$$(1) \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}} \sqrt{a^3}} \div \sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}} \sqrt[3]{a}}$$

$$(3) 10^{2.5} \times 10^{-0.8} \div 10^{\frac{5}{2}}$$

$$(4) a > b > 0, (a - 2\sqrt{ab} + b)^{\frac{1}{2}} (a + 2\sqrt{ab} + b)^{\frac{1}{2}}$$

$$(5) (16a^{-3} + \frac{6}{a^2} + \frac{5}{a} - 6) \div (2a^{-1} - 1)$$

Ex4. 化簡下列各式

$$(1) a^{\frac{1}{3}} = 5 \text{ 則 } a = \underline{\hspace{2cm}}, \quad a^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \frac{1}{a^5} \times (a^{\frac{1}{2}})^4 \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2} \times (a^3)^2}$$

$$(3) \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \times 0.25^{-2.5}$$

$$(4) \sqrt{5} \times 2\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{5}$$

$$(5) (\pi^3)^{-\frac{1}{2}} \times \pi^{\frac{9}{2}} \times \frac{1}{\pi^2}$$

例 5.海藻培植實驗中發現,面積 1 平方公分的海藻,每經過 4 天的時間面積會變成原來的 8 倍,如果相同時間內海藻面積增加的倍數一定,現在有 10 平方公分的海藻,試問:經過 6 天之後,會有多少面積的海藻?

例 3.下列演算式的結果顯然是錯的,請問在哪一個步驟發生錯誤?

$$\sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{①}$$

$$= [(-1) \times (-2)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{②}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}} (-2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{③}$$

$$= \sqrt{-1} \times \sqrt{-2} \quad \text{④}$$

$$= i \times \sqrt{2}i \quad \text{⑤}$$

$$= -\sqrt{2}. \quad \text{⑥}$$

參考答案

Ex 4. (1) $125, 5\sqrt{5}$ (2) $a^{\frac{-4}{3}}$ (3) 48 (4) 20 (5) π **Ex 5.** $160\sqrt{2}$