Youtube 標題：【吳銘數學】85-高二數學(下) |空間向量—三階行列式應用|
20160318 二恭
行列式與向量特性關聯介紹。
授課教師：吳銘祥老師
影片內容：高二數學(下) 空間向量—空間向量—三階行列式應用
課堂實境：20160318 二恭
發佈日期：2016 年 3 月 20 日
課堂講義：
影片長度： 23min
影片網址： https://youtu.be/dDEM6vqdki4
吳銘祥老師數學教室：http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/...

<u>**補充**</u> 三階行列式的應用

＊我們討論過「如何利用三角形的三個頂點坐標來求此三角形的面積」，結果如下：設$A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$為平面上不共線的三點．由

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)\text{，}\ \overrightarrow{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2)\text{，}$$

得$\triangle ABC$的面積Δ為

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}\right|$$

我們可以將上式中的行列式改寫為

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 1 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\times a_1$　$\times a_2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 1 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

得出平面上三角形的面積公式

若 $A(a_1,a_2)$， $B(b_1,b_2)$， $C(c_1,c_2)$ 為平面上不共線的三點，則△ABC 的面積∆為

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

＊三階行列式除了可以表示三角形的面積之外，也可以表示平行六面體的體積．設

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$， $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$， $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$為空間中的三個向量。

從前面推導可之三個向量所張出之平行六面體的體積為

$\left|\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right|$

$$\left|\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right|=\left|\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(c_1,c_2,c_3)\right|$$

透過餘因子計算倒推觀察

我們知道平行六面體的體積公式可以用三階行列式表示，有了以下的結論：

平行六面體的體積公式

空間中，由三個向量$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$與$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$所張出之平行六面體的體積$V$為

$$V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$$

由平行六面體的體積公式，我們有可推廣出以下特性：

*共線性質：$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$三點共線的充要條件

為$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$。(因為：____________________)

*直線方程式：過點$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$的直線方程式

為$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$。(因為：____________________)

*共面性質：$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$與$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$三向量若共面則

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$=0 。(因為：_______