

【吳銘數學】70-高二數學(下) | 空間向量—空間向量內積介紹 | 20160307 二勤
介紹空間中的內積運算。

授課教師：吳銘祥老師

影片內容：高二數學(下) 空間向量內積介紹

課堂實境：20160307 二勤

發佈日期：2016 年 3 月 10 日

課堂講義：

影片長度：22min

影片網址：<https://youtu.be/sck58Z6GrC0>

吳銘祥老師數學教室：[http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/...](http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/)

§1-3 空間向量的內積

在物理問題中，有時候需要處理空間中兩直線的夾角，或取某力與某一直線的水平和垂直分力，或求取三角形面積等複雜的狀況，這時就可以利用向量的內積來解決。

延續在平面向量的運算特性，接下來我們將其推廣至空間向量來看看。

甲、空間向量的內積

* 設 $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩個不平行的非零向量，
且其夾角為 θ

(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 內積的定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$(3) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

* 空間中兩向量垂直的判定

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中任意兩個向量 . 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$,
則 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$; 反之亦成立 .

內積的性質

* 設 r 為實數 , $\vec{a}$, $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 為任意向量 .

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = \left| \vec{a} \right|^2 . \quad (\text{正定性})$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} . \quad (\text{交換律})$$

$$(3) (r \vec{a}) \cdot \vec{b} = r (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{分配律})$$

$$* (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b}$$

範例1.

根據 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 內積的定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \theta$

來證明 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

範例2.

已知 $\vec{a} = (1, 1, 2)$ 與 $\vec{b} = (1, -2, -1)$ ，求

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角

類題 1

已知 $\vec{a} = (1, 1, 2)$ 與 $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ ，求 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角