

【上架課堂講義內容】

課堂影片片名：【吳銘數學】57-高二數學(上)|向量一二階行列式(面積公式推導)|

20160111 二勤

發佈日期：2016年1月13日

授課教師：吳銘祥老師

授課主題：高二數學(上) 3-4 向量一二階行列式(面積公式推導)

課堂時間：20160111 二勤

課堂講義：

影片長度：37min

吳銘祥老師數學教室：<http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/blog/?cat=20>

講義內容節錄：

3-4 面積與二階行列式

向量所記錄下來的數據，包含了長度也留下了角度；因此在第一章三角函數，我們學習到許多利用長度及角度找出圖形面積的方式，那是否也可以移植過來，利用向量來表示呢？這當中，我們再多學習一個紀錄計算方式的方式—行列式，方便後續的紀錄。

甲、面積公式與二階行列式

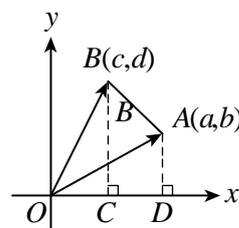
*右圖中，向量 $\vec{OA}=(a,b)$ 與 $\vec{OB}=(c,d)$ 所張出的 $\triangle OAB$ 之面積為

$\triangle OCB$ 的面積 + 梯形 $CDAB$ 的面積 - $\triangle ODA$ 的面積

$$\underline{\hspace{10em}} = \frac{cd}{2} + \frac{(b+d)(a-c)}{2} - \frac{ab}{2}$$

$$\underline{\hspace{10em}} = \frac{1}{2}(cd + ab - bc + ad - cd - ab)$$

$$\underline{\hspace{10em}} = \frac{1}{2}(ad - bc)$$



*符號 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 稱為二階行列式，它所代表的數為 $ad - bc$ ，即

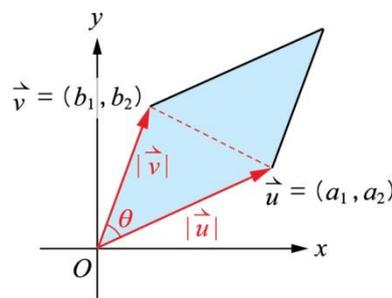
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



* 三角形與平行四邊形的面積公式

由兩不平行向量 $\vec{u} = (a_1, a_2)$ 與 $\vec{v} = (b_1, b_2)$ 所張出的平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

由其夾出三角形面積為 $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$



* 行列式的性質

行列式是數學中有用的工具，可做為一種運算紀錄。我們先來討論行列式的基本性質：

二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中，橫的稱為列，直的稱為行。

二階行列式的運算性質，這些性質都可以直接由定義將行列式展開而推得。

(1) 行列互換，其值不變

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

(2) 兩行（列）對調，其值變號

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

(3) 任一行（列）乘上 k 倍，其值變為 k 倍

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(4) 兩行（列）成比例時，其值為 0

$$\begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} = 0$$

(5) 將一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix}$$

(6) 可依任一行（列）將一個行列式拆成兩個行列式

$$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$



你是讓世界變美好的理由。
Dorothy ©

* 兩向量平行的判定

設 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 與 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ 為坐標平面上任意兩個非零向量。

若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ ；反之亦成立



範例3.

試說明下列行列式運算規則

- (1) 行列互換，其值不變
- (2) 兩行（列）對調，其值變號
- (3) 任一行（列）乘上 k 倍，其值變為 k 倍

類題 1

試說明下列行列式運算規則

- (1) 兩行（列）成比例時，其值為 0
- (2) 將一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變
- (3) 可依任一行（列）將一個行列式拆成兩個行列式



範例4.

求二階行列式(1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 的值 (2) $\begin{vmatrix} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{vmatrix}$ 的值

Ans: (1) 29 (2) 13

類題 1

求二階行列式(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ 的值 (2) $\begin{vmatrix} 456 & 455 \\ 789 & 788 \end{vmatrix}$ 的值

Ans: (1) 10 (2) 333



範例5.

已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a+5b & 3a-4b \\ 2c+5d & 3c-4d \end{vmatrix}$ 的值

(2)若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$ ， $\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} 4a+3x & 4b+3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1)-46(2)120

類題 1

(1)若 $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = 7$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a-3p & a+3p \\ 2b-3q & b+3q \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$ ， $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = -1$ ，則 $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans:(1)63 (2)3

