重點一 https://youtu.be/3Mgc_6LC6TE

數列

何謂數列：將一系列的數**依照順序**列出來，就構成一個**數列**。

可分成有限數列與無窮數列。目前學測僅討論到有限數列。

特殊數列　　　　　　　　　　　　記錄法(遞迴)

(1)費波那契數列

(2)巴斯卡數列

(3)等差數列

(4)等比數列

牛刀小試

觀察下列數列的規則：1, $\frac{1}{3}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{1}$，...，依此規則求第 100 項為_______。

Ans: $\frac{17}{11}$

試找出滿足前五項的遞迴數列：$a_1=2, a_2=5, a_3=12, a_4=27, a_5=58$　　　Ans:(D)

(A) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2a_n+1 \end{cases}, n\in N$ (B) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=3a_n-1 \end{cases}, n\in N$ (C) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=4a_n-5n+2 \end{cases}, n\in N$ (D) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2a_n+n \end{cases}, n\in N$

重點二 https://youtu.be/b7V_hhzo0x4

遞迴數列推得一般式，三大題型

什麼叫遞迴數列：

一個數列＜a_n＞，如果

（i）給定前幾項（如 a_1，a_2）的值。（稱為初始條件）

（ii）一般項 a_n 可用前相鄰數項 a_{n-1}，a_{n-2}，…表示。這種定義叫做遞迴關係式。

1、 暴力觀察法 $\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{2} \\ a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1} \ (n\ge 2) \end{cases}$ (why 可以猜測，留待數學歸納法)

2、 加法遞迴法 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=a_{n-1}+5 \end{cases}$

3、 乘法遞迴法 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=2a_{n-1}-3 \end{cases}$

牛刀小試

設數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_n=\dfrac{n}{n+1}a_{n-1} \ (n\ge 2) \end{cases}$，

(1)寫出 a_2 與 a_3 (2)猜測一般項 a_n

數列 1, 2, 5, 10, 17, 26, ...滿足 $a_n-a_{n-1}=2n-3$，$n\ge 2$，依此規則推算，第 n 項 a_n = ________

Ans: 1+(n–1)^2

重點三 https://youtu.be/suXNYI9WTp0

因果關係觀察出遞迴關係

上樓梯：

n階樓梯，若每次動作可以踏一階和踏二階，若走完n階樓梯的方法有a_n 種，試完成其遞迴關係式。

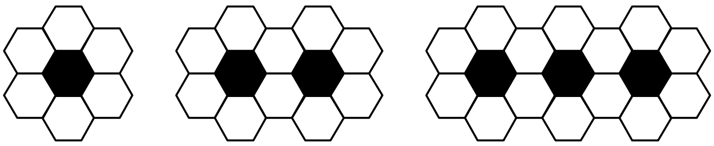
河內塔：

三根柱，一次移動一個盤子且大不壓小，n個盤子最少移動a_n次。

試完成其遞迴關係式。

牛刀小試

用黑白兩種顏色的正六邊形地磚依照如下的規律，黑色地磚每次增加一塊，拼成若干圖形：



第1圖　　第2圖　　第3圖

設a_n為第 n 圖中白色地磚的總數（如圖可知：$a_1=6$， $a_2=10$， $a_3=14$） .

(1)寫出數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式 .

(2)寫出數列a_n一般項

(3)求a_{50} .

Ans:(1)$\begin{cases} a_1=6 \\ a_n=a_{n-1}+4 \ \ ,n\geq 2 \end{cases}$ (2) $a_n=4n+2$ (3)202

重點四 https://youtu.be/LtkdnMwNjZQ

等差數列

1、 等差數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1，公差為d，

則其一般項為 $\underline{a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d}$

2、 等差中項應用：

若a, b, c成等差數列，則 $\underline{b = \dfrac{a+c}{2}}$

牛刀小試

設〈a_n〉為等差數列，且 $a_{10} = 73$，$a_{24} = 31$，求首項 a_1 為何？

若前 n 項和有最大值，此時 n 值為何？並求此最大值？ Ans: 100，$n = 34$，1717

在 2 與 100 之間插入 13 個數$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{13}$使得它們形成一等差數列，

則 a_7 =________，a_{10} =________。 Ans: 51, 72

等比數列

1、 等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1，公比為r（$r \neq 0$）

則其一般項為$\underline{a_n = a_1 \times r^{n-1} = a_m \times r^{n-m}}$

2、 等比中項應用：

若a, b, c成等比數列，則 $\underline{b^2 = ac}$

牛刀小試

若等比數列之前三項為 x，$3x+3$，$4x+4$，求第 4 項為_____（不可以 x 表示） Ans: $-\dfrac{64}{15}$

設〈a_n〉為等差數列，且$a_3 + a_{98} = 10$，求$\sum_{k=1}^{100} a_k = ?$ Ans: 500

級數

1、 S_n表示等差數列$\langle a_n \rangle$前 n 項的和且公差為 d，則

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}=\text{中間項}\times n$$

2、 設S_n表示等比數列$\langle a_n \rangle$前 n 項的和且公比為 r

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1-ra_n}{1-r}$$

牛刀小試

(1) 已知一等差數列的第 8 項為 18，第 15 項為 –94， 前 n 項和為 S_n， 求 S_n 的最大值

(2) 一等比數列的首項為 7，末項為 448，總和為 889，求此數列的項數

Ans:(1) $S_9=594$ (2) $n=7$

有兩個等差數列〈a_n〉與〈b_n〉，且 S_n, T_n 分別表示前 n 項之和若 S_n：T_n = ($7n+1$)：($4n+27$)，試求 a_{11}：b_{11} 之比值 Ans: 4：3

Σ的表示方法

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

三大常用公式：

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

牛刀小試

將級數 $4\cdot(3n+4)+6\cdot(3n+1)+8\cdot(3n-2)+\cdots+(2n+2)\cdot 7$ 以 Σ 符號表示，並求出其總和。

Ans: $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)(3n+7-3k) = n^3+10n^2+17n$

求級數 $1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 3\cdot(n-2) + \cdots + (n-1)\cdot 2 + n\cdot 1$ 的和 Ans: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

重點八 https://youtu.be/Ox3Fu3QYkVQ

數學歸納法

數學歸納法原理與骨牌遊戲的原理一樣，可以藉由兩個原則依序推倒所有的骨牌：

(1)推倒第一個骨牌．

(2)當一張骨牌被推倒時，必然能推倒下一張骨牌．

如果能做到上面的兩件事，就可以保證所有的骨牌都將被推倒

試利用數學歸納法證明 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}\ (n \geq 2) \end{cases}$ 一般式為 $a_n = \dfrac{3}{6n-4}$

牛刀小試

利用數學歸納法證明：$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$