

【上架課堂講義內容】

課堂影片片名:【吳銘祥老師】42-高二數學(上)|向量—內積運算的推廣| 20151223
二勤

發佈日期: 2015 年 12 月 24 日

授課教師: 吳銘祥老師

授課主題: 高二數學(上) 3-2 向量—內積運算的推廣

課堂時間: 20151223 二勤

課堂講義:

影片長度 40min

吳銘祥老師數學教室: <http://moodle.fg.tp.edu.tw/~tfgcoocs/blog/?cat=20>

講義內容節錄:

3-2 平面向量的內積

乙、內積的性質

* 設 r 為實數, \vec{a} , \vec{b} 與 \vec{c} 為任意向量。

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad (\text{正定性})$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{交換律})$$

$$(3) (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{分配律})$$

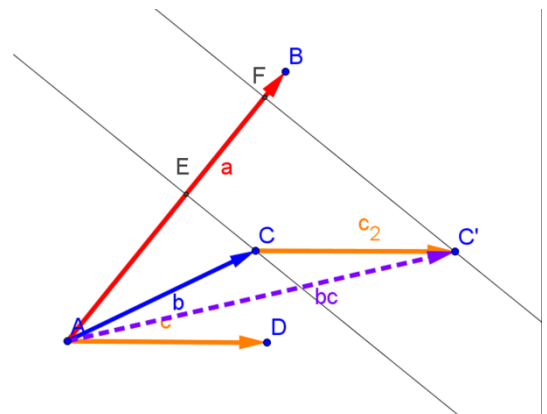
$$* (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ \\ &= |\vec{a}|^2 = \text{右式} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \\ &= |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \theta \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (r\vec{a}) \cdot \vec{b} &= r \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta) \\ &= r \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \\ &= r \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta) \\ &= r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) r < 0 &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-\cos \theta) \\ &= (-r) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-\cos \theta) = r \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$



$$\textcircled{1} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\textcircled{2} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$\textcircled{3} \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

二乗同

$$|\vec{a} + \vec{b}|^3 = |\vec{a}|^3 + 3|\vec{a}|^2|\vec{b}| + 3|\vec{a}||\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^3$$

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^3 = |\vec{a}|^3 + 3|\vec{a}|^2|\vec{b}| + 3|\vec{a}||\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^3$$

$$= (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b})^{\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{4} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^{10} = C_{10}^{10} |\vec{a}|^{10} + C_{10}^9 |\vec{a}|^9 |\vec{b}| + C_{10}^8 |\vec{a}|^8 |\vec{b}|^2 + \dots$$

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



$$|\vec{a} + \vec{b}|^4 = \underbrace{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}_{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \cdot \underbrace{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}_{|\vec{a} + \vec{b}|^2} = |\vec{a} + \vec{b}|^4$$

範例6. 已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, 且 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角為 120° , 求下列各值:

$$(1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) . \quad (2) |\vec{a} + 2\vec{b}|$$

類題 1

已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, 且 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角為 60° , 求下列各值:

$$(1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) . \quad (2) |3\vec{a} - 2\vec{b}|$$