

【上架課堂影片內容】

課堂影片片名：『吳銘祥-高二-餘弦定理』

課堂影片簡介：46min。推導出餘弦定理及題目演練。

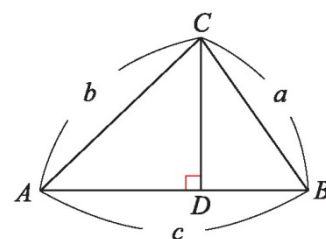
講義內容節錄：

丙、餘弦定理

\*  $\overline{CD}$  將銳角三角形  $ABC$  切割成兩個直角三角形，在直角三角形  $ACD$  中，

$$\sin A = \frac{\overline{CD}}{b}, \quad \cos A = \frac{\overline{AD}}{b},$$

$$\overline{CD} = b \sin A, \quad \overline{AD} = b \cos A, \quad \overline{BD} = c - b \cos A$$



在直角三角形  $BCD$  中， $a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$

$$\begin{aligned} &= b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ \text{同理可得} \quad \rightarrow \quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B && \text{這就是餘弦定理。} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}$$

經移項整理，餘弦定理也可以改寫成：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

\* 補充：投影定理

範例1.

利用座標化推得餘弦定理

將 $\triangle ABC$  放在坐標平面上，使

$A$  點為原點， $B$  點的坐標為  $(c, 0)$ ，則  $C$  點的坐標為  $(b \cos A, b \sin A)$

類題 1

設 $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\overline{BC}$ 的長

範例2.

在 $\triangle ABC$  中，已知 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 7$ ，求 $\angle A$ 的度數

類題 1

在 $\triangle ABC$  中，已知 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{AC} = \sqrt{19}$ ，求 $\angle B$ 的度數

範例3.

$\triangle ABC$  中， $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ ，試求  $\angle A$  的值

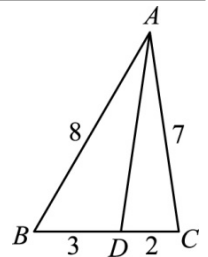
類題 1

$\triangle ABC$  中， $(a+b+c)(a-b+c)=ac$ ，試求  $\angle B$  的值

範例4.

在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AC}=7$ ， $D$  在  $\overline{BC}$  上，使得  $\overline{BD}=3$ ，

$\overline{CD}=2$ ，如圖所示，試求  $\overline{AD}$  的長度



類題 1

如圖所示，試求  $x$  的長度。

